Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d’antichaînes maximales pour l’inclusion
Programmation
Perspectives

Etude des points fixes de la puissance de l’application de Kong - Ribenboim

Etude du Compte Rendu de l’Académie des Sciences de Paris : ”Chaining partially ordered sets” de Tat Yung Kong et Paulo Ribenboim

Del Mondo Géraldine

Laboratoire d’Informatique de Nantes Atlantique

09 juin 2006

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Plan

- Notions introductives
- Principe général
- Énoncé du théorème
- Résultats préliminaires
- Le théorème
- Lemme
- Problématique annexe : nombre d'antichaîne maximal pour l'inclusion d'un ordre fini ou infini
- Programmation
- Perspectives

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Plan

- Notions introductives
- Principe général
- Énoncé du théorème
- Résultats préliminaires
- Le théorème
- Lemme
- Problématique annexe : nombre d'antichaîne maximal pour l'inclusion d'un ordre fini ou infini
- Programmation
- Perspectives

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Plan

- Notions introductives
- Principe général
- Énoncé du théorème
- Résultats préliminaires
- Le théorème
- Lemme
- Problématique annexe : nombre d'antichaîne maximal pour l'inclusion d'un ordre fini ou infini
- Programmation
- Perspectives

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Plan

- Notions introductives
- Principe général
- Énoncé du théorème
- Résultats préliminaires
- Le théorème
- Lemme
- Problématique annexe : nombre d'antichaîne maximal pour l'inclusion d'un ordre fini ou infini
- Programmation
- Perspectives

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Plan

- Notions introductives
- Principe général
- Énoncé du théorème
- Résultats préliminaires
- Le théorème
- Lemme
- Problématique annexe : nombre d'antichaîne maximal pour l'inclusion d'un ordre fini ou infini
- Programmation
- Perspectives

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Plan

- Notions introductives
- Principe général
- Énoncé du théorème
- Résultats préliminaires
- Le théorème
- Lemme
- Problématique annexe : nombre d'antichaîne maximal pour l'inclusion d'un ordre fini ou infini
- Programmation
- Perspectives

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Plan

- Notions introductives
- Principe général
- Énoncé du théorème
- Résultats préliminaires
- Le théorème
- Lemme
- Problématique annexe : nombre d'antichaîne maximal pour l'inclusion d'un ordre fini ou infini
- Programmation
- Perspectives

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Plan

- Notions introductives
- Principe général
- Énoncé du théorème
- Résultats préliminaires
- Le théorème
- Lemme
- Problématique annexe : nombre d'antichaîne maximal pour l'inclusion d'un ordre fini ou infini
- Programmation
- Perspectives

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Plan

- Notions introductives
- Principe général
- Énoncé du théorème
- Résultats préliminaires
- Le théorème
- Lemme
- Problématique annexe : nombre d'antichaîne maximal pour l'inclusion d'un ordre fini ou infini
- Programmation
- Perspectives

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Plan

- Notions introductives
- Principe général
- Énoncé du théorème
- Résultats préliminaires
- Le théorème
- Lemme
- Problématique annexe : nombre d'antichaîne maximal pour l'inclusion d'un ordre fini ou infini
- Programmation
- Perspectives

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Ordre strict P

P est un couple $(V(P), <_P)$ avec $V(P)$ un ensemble d'éléments et $<_P$ une relation d'ordre sur ces éléments.

Relation d'ordre

Une relation d'ordre stricte $<_P$ est une relation binaire transitive et antiréflexive de base $V(P)$.

Un ordre large P est un couple $(V(P), \leqslant_P)$ tel que $(V(P), <_P)$ soit un ordre strict et $\leqslant_P = <_P \cup \{(x, x) : x \in V(P)\}$.

Comparabilité entre éléments

Soit l'ordre $P = (V(P), <_P)$, $x, y \in V(P)$ sont dits comparables dans P si $x <_P y$ ou $y <_P x$, (noté $x \sim_P y$) ils sont dits incomparables (noté $x \parallel_P y$) sinon.

Chaîne C, Antichaîne A

Une chaîne dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux comparables dans P. Le sous-ordre induit par les éléments d'une chaîne est un ordre total.

Une antichaîne dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux incomparables dans P.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Ordre strict P

P est un couple $(V(P), <_P)$ avec $V(P)$ un ensemble d'éléments et $<_P$ une relation d'ordre sur ces éléments.

Relation d'ordre

Une relation d'ordre stricte $<_P$ est une relation binaire transitive et antiréflexive de base $V(P)$.

Un ordre large P est un couple $(V(P), \leqslant_P)$ tel que $(V(P), <_P)$ soit un ordre strict et $\leqslant_P = <_P \cup \{(x, x) : x \in V(P)\}$.

Comparabilité entre éléments

Soit l'ordre $P = (V(P), <_P)$, $x, y \in V(P)$ sont dits comparables dans P si $x <_P y$ ou $y <_P x$, (noté $x \sim_P y$) ils sont dits incomparables (noté $x \parallel_P y$) sinon.

Chaîne C, Antichaîne A

Une chaîne dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux comparables dans P. Le sous-ordre induit par les éléments d'une chaîne est un ordre total.

Une antichaîne dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux incomparables dans P.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Ordre strict P

P est un couple $(V(P), <_P)$ avec $V(P)$ un ensemble d'éléments et $<_P$ une relation d'ordre sur ces éléments.

Relation d'ordre

Une relation d'ordre stricte $<_P$ est une relation binaire transitive et antiréflexive de base $V(P)$.
ℹ Un ordre large P est un couple $(V(P), \leqslant_P)$ tel que $(V(P), <_P)$ soit un ordre strict et $\leqslant_P = <_P \cup \{(x,x) : x \in V(P)\}$.

Comparabilité entre éléments

Soit l'ordre $P = (V(P), <_P)$, $x, y \in V(P)$ sont dits comparables dans P si $x <_P y$ ou $y <_P x$, (noté $x \sim_P y$) ils sont dits incomparables (noté $x \parallel_P y$) sinon.

Chaîne C, Antichaîne A

Une chaîne dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux comparables dans P. Le sous-ordre induit par les éléments d'une chaîne est un ordre total.
Une antichaîne dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux incomparables dans P.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Ordre strict P

P est un couple $(V(P), <_P)$ avec $V(P)$ un ensemble d'éléments et $<_P$ une relation d'ordre sur ces éléments.

Relation d'ordre

Une relation d'ordre stricte $<_P$ est une relation binaire transitive et antiréflexive de base $V(P)$.
ℹ Un ordre large P est un couple $(V(P), \leqslant_P)$ tel que $(V(P), <_P)$ soit un ordre strict et $\leqslant_P = <_P \cup \{(x,x) : x \in V(P)\}$.

Comparabilité entre éléments

Soit l'ordre $P = (V(P), <_P)$, $x, y \in V(P)$ sont dits comparables dans P si $x <_P y$ ou $y <_P x$, (noté $x \sim_P y$) ils sont dits incomparables (noté $x \|_P y$) sinon.

Chaîne C, Antichaîne A

Une chaîne dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux comparables dans P. Le sous-ordre induit par les éléments d'une chaîne est un ordre total.
Une antichaîne dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux incomparables dans P.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Ordre strict P

P est un couple $(V(P), <_P)$ avec $V(P)$ un ensemble d'éléments et $<_P$ une relation d'ordre sur ces éléments.

Relation d'ordre

Une relation d'ordre stricte $<_P$ est une relation binaire transitive et antiréflexive de base $V(P)$.
ℹ Un ordre large P est un couple $(V(P), \leqslant_P)$ tel que $(V(P), <_P)$ soit un ordre strict et $\leqslant_P = <_P \cup \{(x,x) : x \in V(P)\}$.

Comparabilité entre éléments

Soit l'ordre $P = (V(P), <_P)$, $x, y \in V(P)$ sont dits comparables dans P si $x <_P y$ *ou* $y <_P x$, (noté $x \sim_P y$) ils sont dits incomparables (noté $x \parallel_P y$) sinon.

Chaîne C, Antichaîne A

Une chaîne dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux comparables dans P. Le sous-ordre induit par les éléments d'une chaîne est un ordre total.
Une antichaîne dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux incomparables dans P.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Ordre strict P

P est un couple $(V(P), <_P)$ avec $V(P)$ un ensemble d'éléments et $<_P$ une relation d'ordre sur ces éléments.

Relation d'ordre

Une relation d'ordre stricte $<_P$ est une relation binaire transitive et antiréflexive de base $V(P)$.
ℹ Un ordre large P est un couple $(V(P), \leqslant_P)$ tel que $(V(P), <_P)$ soit un ordre strict et $\leqslant_P = <_P \cup \{(x,x) : x \in V(P)\}$.

Comparabilité entre éléments

Soit l'ordre $P = (V(P), <_P)$, $x, y \in V(P)$ sont dits comparables dans P si $x <_P y$ *ou* $y <_P x$, (noté $x \sim_P y$) ils sont dits incomparables (noté $x \parallel_P y$) sinon.

Chaîne C, Antichaîne A

Une chaîne dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux comparables dans P. Le sous-ordre induit par les éléments d'une chaîne est un ordre total.
Une antichaîne dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux incomparables dans P.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Rang $d_P(x)$, Hauteur $d(P)$

Le rang de x, $d_P(x)$, dans l'ordre P est la taille maximale d'une chaîne de P se terminant par x.

On note $P(k) = \{x : x \in V(P) : d_P(x) = k\}$

La hauteur $d(P)$ est le nombre d'éléments d'une plus longue chaîne de P.

Exemple

$d(P) = 5$

$d_P(0) = d_P(1) = 1$

$d_P(x) = 3$

Une chaîne de P : $\{0, 2, x, 5, 7\}$

Une chaîne de P : $\{2, x, 4\}$

Une antichaîne de P : $\{0, 1\}$

Une antichaîne de P : $\{x\}$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Rang $d_P(x)$, Hauteur $d(P)$

Le rang de x, $d_P(x)$, dans l'ordre P est la taille maximale d'une chaîne de P se terminant par x.

ℹ On note $P(k) = \{x : x \in V(P) : d_P(x) = k\}$

La hauteur $d(P)$ est le nombre d'éléments d'une plus longue chaîne de P.

Exemple

$d(P) = 5$
$d_P(0) = d_P(1) = 1$
$d_P(x) = 3$
Une chaîne de P : $\{0, 2, x, 5, 7\}$
Une chaîne de P : $\{2, x, 4\}$
Une antichaîne de P : $\{0, 1\}$
Une antichaîne de P : $\{x\}$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Rang $d_P(x)$, Hauteur $d(P)$

Le rang de x, $d_P(x)$, dans l'ordre P est la taille maximale d'une chaîne de P se terminant par x.
ℹ On note $P(k) = \{x : x \in V(P) : d_P(x) = k\}$
La hauteur $d(P)$ est le nombre d'éléments d'une plus longue chaîne de P.

Exemple

$d(P) = 5$
$d_P(0) = d_P(1) = 1$
$d_P(x) = 3$
Une chaîne de P : $\{0, 2, x, 5, 7\}$
Une chaîne de P : $\{2, x, 4\}$
Une antichaîne de P : $\{0, 1\}$
Une antichaîne de P : $\{x\}$

Rang $d_P(x)$, Hauteur $d(P)$

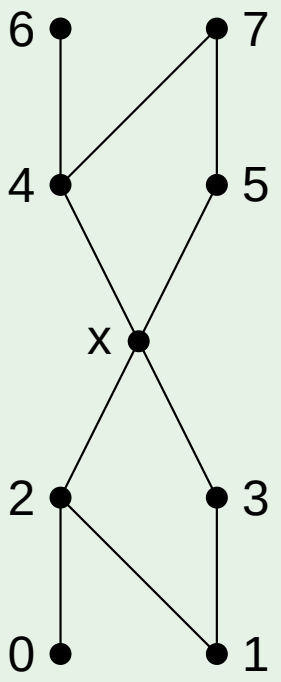
Le rang de x, $d_P(x)$, dans l'ordre P est la taille maximale d'une chaîne de P se terminant par x.

ℹ On note $P(k) = \{x : x \in V(P) : d_P(x) = k\}$

La hauteur $d(P)$ est le nombre d'éléments d'une plus longue chaîne de P.

Exemple

$d(P) = 5$
$d_P(0) = d_P(1) = 1$
$d_P(x) = 3$
Une chaîne de P : $\{0, 2, x, 5, 7\}$
Une chaîne de P : $\{2, x, 4\}$
Une antichaîne de P : $\{0, 1\}$
Une antichaîne de P : $\{x\}$

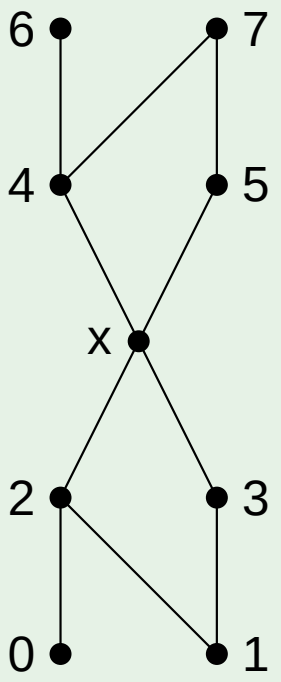


Rang $d_P(x)$, Hauteur $d(P)$

Le rang de x, $d_P(x)$, dans l'ordre P est la taille maximale d'une chaîne de P se terminant par x.
ℹ On note $P(k) = \{x : x \in V(P) : d_P(x) = k\}$
La hauteur $d(P)$ est le nombre d'éléments d'une plus longue chaîne de P.

Exemple

$d(P) = 5$
$d_P(0) = d_P(1) = 1$
$d_P(x) = 3$
Une chaîne de P : $\{0, 2, x, 5, 7\}$
Une chaîne de P : $\{2, x, 4\}$
Une antichaîne de P : $\{0, 1\}$
Une antichaîne de P : $\{x\}$



Rang $d_P(x)$, Hauteur $d(P)$

Le rang de x, $d_P(x)$, dans l'ordre P est la taille maximale d'une chaîne de P se terminant par x.

ℹ On note $P(k) = \{x : x \in V(P) : d_P(x) = k\}$

La hauteur $d(P)$ est le nombre d'éléments d'une plus longue chaîne de P.

Exemple

$d(P) = 5$

$d_P(0) = d_P(1) = 1$

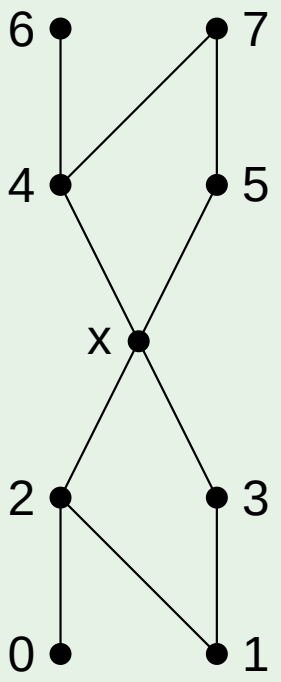
$d_P(x) = 3$

Une chaîne de P : $\{0, 2, x, 5, 7\}$

Une chaîne de P : $\{2, x, 4\}$

Une antichaîne de P : $\{0, 1\}$

Une antichaîne de P : $\{x\}$



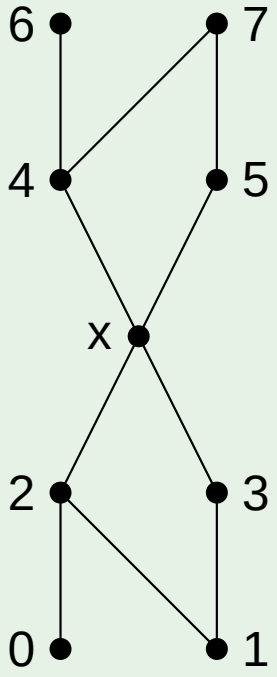
Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Rang $d_P(x)$, Hauteur $d(P)$

Le rang de x, $d_P(x)$, dans l'ordre P est la taille maximale d'une chaîne de P se terminant par x.
ℹ On note $P(k) = \{x : x \in V(P) : d_P(x) = k\}$
La hauteur $d(P)$ est le nombre d'éléments d'une plus longue chaîne de P.

Exemple

$d(P) = 5$
$d_P(0) = d_P(1) = 1$
$d_P(x) = 3$
Une chaîne de P : $\{0, 2, x, 5, 7\}$
Une chaîne de P : $\{2, x, 4\}$
Une antichaîne de P : $\{0, 1\}$
Une antichaîne de P : $\{x\}$



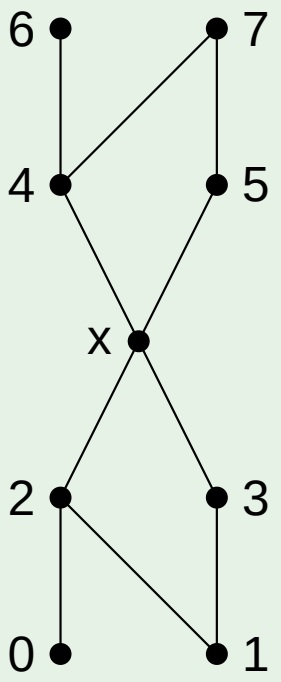
Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Rang $d_P(x)$, Hauteur $d(P)$

Le rang de x, $d_P(x)$, dans l'ordre P est la taille maximale d'une chaîne de P se terminant par x.
ℹ On note $P(k) = \{x : x \in V(P) : d_P(x) = k\}$
La hauteur $d(P)$ est le nombre d'éléments d'une plus longue chaîne de P.

Exemple

$d(P) = 5$
$d_P(0) = d_P(1) = 1$
$d_P(x) = 3$
Une chaîne de P : $\{0, 2, x, 5, 7\}$
Une chaîne de P : $\{2, x, 4\}$
Une antichaîne de P : $\{0, 1\}$
Une antichaîne de P : $\{x\}$



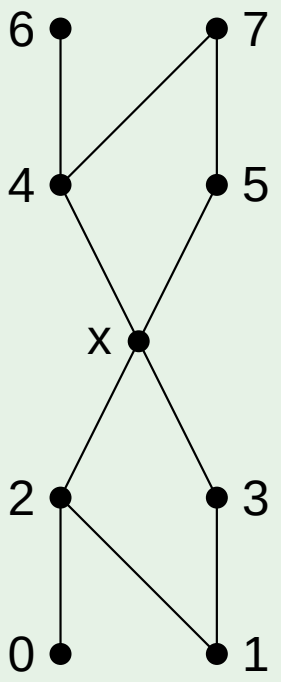
Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Rang $d_P(x)$, Hauteur $d(P)$

Le rang de x, $d_P(x)$, dans l'ordre P est la taille maximale d'une chaîne de P se terminant par x.
ℹ On note $P(k) = \{x : x \in V(P) : d_P(x) = k\}$
La hauteur $d(P)$ est le nombre d'éléments d'une plus longue chaîne de P.

Exemple

$d(P) = 5$
$d_P(0) = d_P(1) = 1$
$d_P(x) = 3$
Une chaîne de P : $\{0, 2, x, 5, 7\}$
Une chaîne de P : $\{2, x, 4\}$
Une antichaîne de P : $\{0, 1\}$
Une antichaîne de P : $\{x\}$

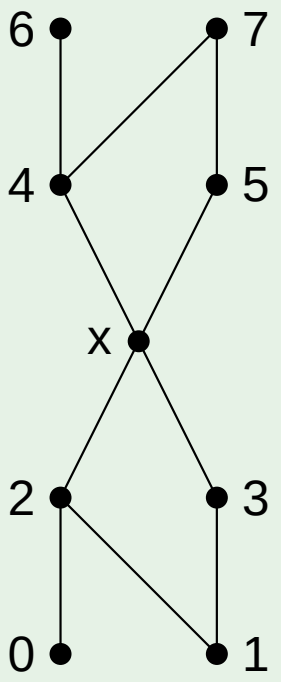


Rang $d_P(x)$, Hauteur $d(P)$

Le rang de x, $d_P(x)$, dans l'ordre P est la taille maximale d'une chaîne de P se terminant par x.
ℹ On note $P(k) = \{x : x \in V(P) : d_P(x) = k\}$
La hauteur $d(P)$ est le nombre d'éléments d'une plus longue chaîne de P.

Exemple

$d(P) = 5$
$d_P(0) = d_P(1) = 1$
$d_P(x) = 3$
Une chaîne de P : $\{0, 2, x, 5, 7\}$
Une chaîne de P : $\{2, x, 4\}$
Une antichaîne de P : $\{0, 1\}$
Une antichaîne de P : $\{x\}$

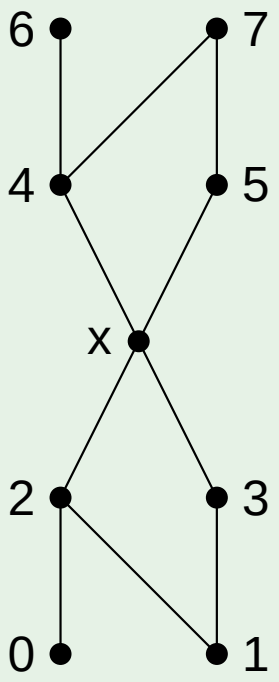


Rang $d_P(x)$, Hauteur $d(P)$

Le rang de x, $d_P(x)$, dans l'ordre P est la taille maximale d'une chaîne de P se terminant par x.
ℹ On note $P(k) = \{x : x \in V(P) : d_P(x) = k\}$
La hauteur $d(P)$ est le nombre d'éléments d'une plus longue chaîne de P.

Exemple

$d(P) = 5$
$d_P(0) = d_P(1) = 1$
$d_P(x) = 3$
Une chaîne de P : $\{0, 2, x, 5, 7\}$
Une chaîne de P : $\{2, x, 4\}$
Une antichaîne de P : $\{0, 1\}$
Une antichaîne de P : $\{x\}$



Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Objectif

Calculer la borne supérieure du nombre d'itérations nécessaires pour transformer un ordre quelconque en une chaîne.

Moyens

On se donne un ordre large P_i et l'on désigne par P_{i+1} l'ordre large tel que :

- $P_0 = P$.
- $\forall\, i \geqslant 1$, $P_{i+1} = f(P_i)$, avec $f : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $(V(P_i), \preceq_{P_i}) \to (V(P_{i+1}), \preceq_{P_{i+1}})$.
- $V(P_{i+1})$ est l'ensemble des antichaînes maximales (pour l'inclusion) de P_i.
- $\preceq_{P_{i+1}}$ est telle que pour $A_1, A_2 \in V(P_{i+1})$, $A_1 \preceq_{P_{i+1}} A_2 \Leftrightarrow \forall x \in A_1\ \exists y \in A_2$ tel que $x \preceq_{P_i} y$.

Calcul de la borne

Tant que P_i n'est pas une chaîne, on le remplace par P_{i+1}, lorsque l'on s'arrête, i est le nombre d'itération nécessaire que l'on recherche.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Objectif

Calculer la borne supérieure du nombre d'itérations nécessaires pour transformer un ordre quelconque en une chaîne.

Moyens

On se donne un ordre large P_i et l'on désigne par P_{i+1} l'ordre large tel que :

- $P_0 = P$.
- $\forall\, i \geqslant 1$, $P_{i+1} = f(P_i)$, avec $f : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $(V(P_i),\ \preceq_{P_i}) \to (V(P_{i+1}),\ \preceq_{P_{i+1}})$.
- $V(P_{i+1})$ est l'ensemble des antichaînes maximales (pour l'inclusion) de P_i.
- $\preceq_{P_{i+1}}$ est telle que pour $A_1, A_2 \in V(P_{i+1})$, $A_1 \prec_{P_{i+1}} A_2 \Leftrightarrow \forall x \in A_1\ \exists y \in A_2$ tel que $x \prec_{P_i} y$.

Calcul de la borne

Tant que P_i n'est pas une chaîne, on le remplace par P_{i+1}, lorsque l'on s'arrête, i est le nombre d'itération nécessaire que l'on recherche.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Objectif

Calculer la borne supérieure du nombre d'itérations nécessaires pour transformer un ordre quelconque en une chaîne.

Moyens

On se donne un ordre large P_i et l'on désigne par P_{i+1} l'ordre large tel que :

- $P_0 = P$.
- $\forall\, i \geqslant 1$, $P_{i+1} = f(P_i)$, avec $f : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $(V(P_i), \preceq_{P_i}) \to (V(P_{i+1}), \preceq_{P_{i+1}})$.
- $V(P_{i+1})$ est l'ensemble des antichaînes maximales (pour l'inclusion) de P_i.
- $\preceq_{P_{i+1}}$ est telle que pour $A_1, A_2 \in V(P_{i+1})$, $A_1 \prec_{P_{i+1}} A_2 \Leftrightarrow \forall x \in A_1\ \exists y \in A_2$ tel que $x \prec_{P_i} y$.

Calcul de la borne

Tant que P_i n'est pas une chaîne, on le remplace par P_{i+1}, lorsque l'on s'arrête, i est le nombre d'itération nécessaire que l'on recherche.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Objectif

Calculer la borne supérieure du nombre d'itérations nécessaires pour transformer un ordre quelconque en une chaîne.

Moyens

On se donne un ordre large P_i et l'on désigne par P_{i+1} l'ordre large tel que :

- $P_0 = P$.
- $\forall\, i \geqslant 1$, $P_{i+1} = f(P_i)$, avec $f : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $(V(P_i),\ \preceq_{P_i}) \to (V(P_{i+1}),\ \preceq_{P_{i+1}})$.
- $V(P_{i+1})$ est l'ensemble des antichaînes maximales (pour l'inclusion) de P_i.
- $\preceq_{P_{i+1}}$ est telle que pour $A_1, A_2 \in V(P_{i+1})$, $A_1 \prec_{P_{i+1}} A_2 \Leftrightarrow \forall x \in A_1\ \exists y \in A_2$ tel que $x \prec_{P_i} y$.

Calcul de la borne

Tant que P_i n'est pas une chaîne, on le remplace par P_{i+1}, lorsque l'on s'arrête, i est le nombre d'itération nécessaire que l'on recherche.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Objectif

Calculer la borne supérieure du nombre d'itérations nécessaires pour transformer un ordre quelconque en une chaîne.

Moyens

On se donne un ordre large P_i et l'on désigne par P_{i+1} l'ordre large tel que :

- $P_0 = P$.
- $\forall\, i \geqslant 1$, $P_{i+1} = f(P_i)$, avec $f : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $(V(P_i),\ \preceq_{P_i}) \to (V(P_{i+1}),\ \preceq_{P_{i+1}})$.
- $V(P_{i+1})$ est l'ensemble des antichaînes maximales (pour l'inclusion) de P_i.
- $\preceq_{P_{i+1}}$ est telle que pour $A_1, A_2 \in V(P_{i+1})$, $A_1 \prec_{P_{i+1}} A_2 \Leftrightarrow \forall x \in A_1\ \exists y \in A_2$ tel que $x \prec_{P_i} y$.

Calcul de la borne

Tant que P_i n'est pas une chaîne, on le remplace par P_{i+1}, lorsque l'on s'arrête, i est le nombre d'itération nécessaire que l'on recherche.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Objectif

Calculer la borne supérieure du nombre d'itérations nécessaires pour transformer un ordre quelconque en une chaîne.

Moyens

On se donne un ordre large P_i et l'on désigne par P_{i+1} l'ordre large tel que :

- $P_0 = P$.
- $\forall\, i \geqslant 1$, $P_{i+1} = f(P_i)$, avec $f : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $(V(P_i),\ \preceq_{P_i}) \to (V(P_{i+1}),\ \preceq_{P_{i+1}})$.
- $V(P_{i+1})$ est l'ensemble des antichaînes maximales (pour l'inclusion) de P_i.
- $\preceq_{P_{i+1}}$ est telle que pour $A_1, A_2 \in\ V(P_{i+1})$, $A_1 \prec_{P_{i+1}} A_2 \Leftrightarrow \forall x \in A_1\ \exists y \in A_2$ tel que $x \prec_{P_i} y$.

Calcul de la borne

Tant que P_i n'est pas une chaîne, on le remplace par P_{i+1}, lorsque l'on s'arrête, i est le nombre d'itération nécessaire que l'on recherche.

Objectif

Calculer la borne supérieure du nombre d'itérations nécessaires pour transformer un ordre quelconque en une chaîne.

Moyens

On se donne un ordre large P_i et l'on désigne par P_{i+1} l'ordre large tel que :

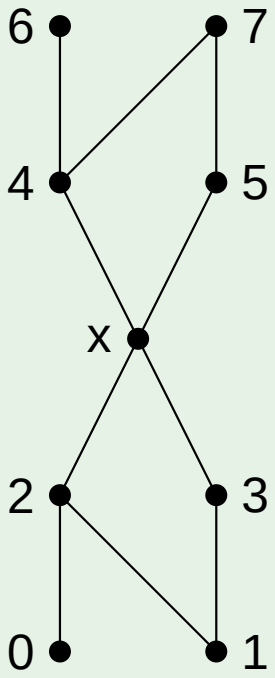
- $P_0 = P$.
- $\forall\, i \geqslant 1$, $P_{i+1} = f(P_i)$, avec $f : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $(V(P_i),\ \preceq_{P_i}) \to (V(P_{i+1}),\ \preceq_{P_{i+1}})$.
- $V(P_{i+1})$ est l'ensemble des antichaînes maximales (pour l'inclusion) de P_i.
- $\preceq_{P_{i+1}}$ est telle que pour $A_1, A_2 \in\ V(P_{i+1})$, $A_1 \prec_{P_{i+1}} A_2 \Leftrightarrow \forall x \in A_1\ \exists y \in A_2$ tel que $x \prec_{P_i} y$.

Calcul de la borne

Tant que P_i n'est pas une chaîne, on le remplace par P_{i+1}, lorsque l'on s'arrête, i est le nombre d'itération nécessaire que l'on recherche.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

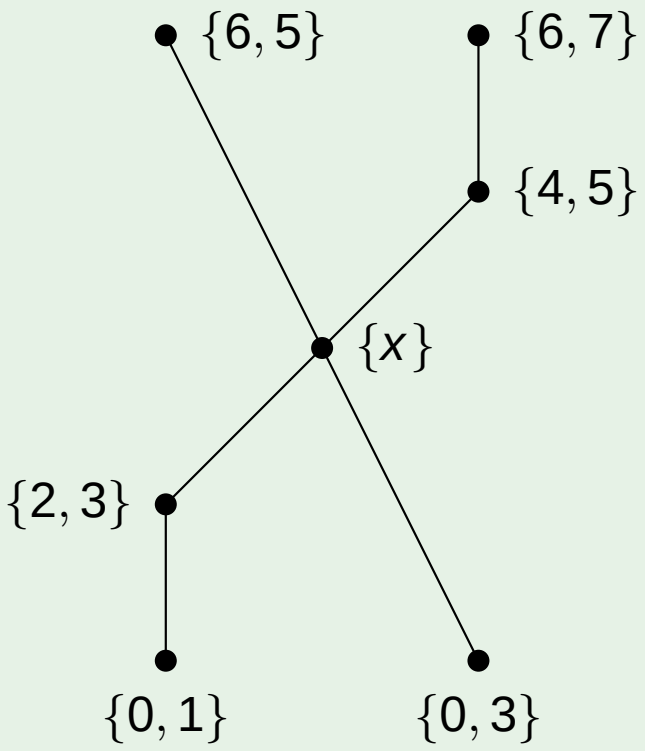
Exemple



Les antichaînes maximales de P sont :
$\{0,1\}; \{0,3\}; \{2,3\}; \{x\}; \{4,5\}; \{6,5\}; \{6,7\}$.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

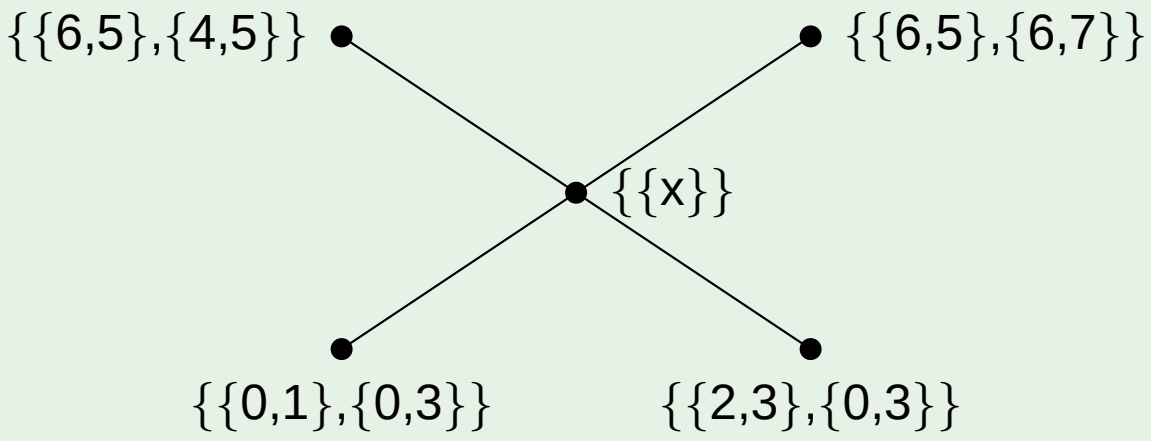
Exemple



Les antichaînes maximales de P_1 sont :
$\{\{0,1\},\{0,3\}\}; \{\{2,3\},\{0,3\}\}; \{\{x\}\}; \{\{6,5\},\{4,5\}\}; \{\{6,5\},\{6,7\}\}$.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Exemple

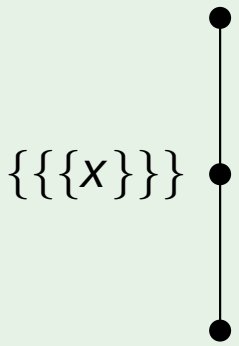


Les antichaînes maximales de P_2 sont :
$\{\{\{0,1\},\{0,3\}\},\{\{2,3\},\{0,3\}\}\}; \{\{\{x\}\}\}; \{\{\{6,5\},\{4,5\}\},\{\{6,5\},\{6,7\}\}\}$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Exemple

$$\{\{\{6,5\},\{4,5\}\},\{\{6,5\},\{6,7\}\}\}$$



$$\{\{\{0,1\},\{0,3\}\},\{\{2,3\},\{0,3\}\}\}$$

Le nombre d'itération est ici égal à 3.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

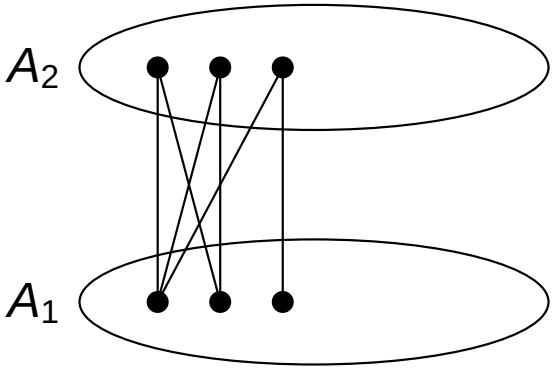
Théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Proposition 1

Soit P un ordre large et soient $A_1, A_2 \in P_1$, alors : $A_1 \prec_{P_1} A_2 \Leftrightarrow \forall\, y \in A_2$, $\exists\, x \in A_1$ *tel que* $x \prec_P y$



Proposition 2

Si $d_P(x) = k < \infty$ et $x_1 \prec_P \cdots \prec_P x_k = x$ alors $d_P(x_j) = j$, $\forall\, j \in [k]$.

Proposition 3

Si $d(P) < \infty$ *alors* $\forall j \leqslant d(P)$ *avec* $j \in \mathbb{N}^+$, $P(j)$ est une antichaîne non vide de P.

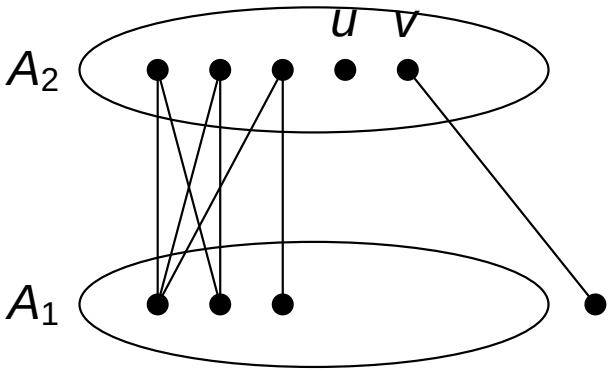
Proposition 4

Soit P un ordre, $A \in P_1$, $x \in A$. Si $d_{P_1}(A) = k$ alors $d_P(x) \geqslant k$.
Corollaire : Soit P un ordre, alors $d(P) \geqslant d(P_1)$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Proposition 1

Soit P un ordre large et soient $A_1, A_2 \in P_1$, alors : $A_1 \prec_{P_1} A_2 \Leftrightarrow \forall\, y \in A_2$, $\exists\, x \in A_1$ *tel que* $x \prec_P y$



Proposition 2

Si $d_P(x) = k < \infty$ et $x_1 \prec_P \cdots \prec_P x_k = x$ alors $d_P(x_j) = j$, $\forall\, j \in [k]$.

Proposition 3

Si $d(P) < \infty$ *alors* $\forall j \leqslant d(P)$ *avec* $j \in \mathbb{N}^+$, $P(j)$ est une antichaîne non vide de P.

Proposition 4

Soit P un ordre, $A \in P_1$, $x \in A$. Si $d_{P_1}(A) = k$ alors $d_P(x) \geqslant k$.
Corollaire : Soit P un ordre, alors $d(P) \geqslant d(P_1)$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Proposition 2

Si $d_P(x) = k < \infty$ et $x_1 \prec_P \cdots \prec_P x_k = x$ alors $d_P(x_j) = j$, $\forall\, j \in [k]$.

Proposition 3

Si $d(P) < \infty$ *alors* $\forall j \leqslant d(P)$ *avec* $j \in \mathbb{N}^+$, $P(j)$ est une antichaîne non vide de P.

Proposition 4

Soit P un ordre, $A \in P_1$, $x \in A$. Si $d_{P_1}(A) = k$ alors $d_P(x) \geqslant k$.
Corollaire : Soit P un ordre, alors $d(P) \geqslant d(P_1)$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Proposition 2

Si $d_P(x) = k < \infty$ et $x_1 \prec_P \cdots \prec_P x_k = x$ alors $d_P(x_j) = j,\ \forall\, j \in [k]$.

Proposition 3

Si $d(P) < \infty$ *alors* $\forall j \leqslant d(P)$ *avec* $j \in \mathbb{N}^+$, $P(j)$ est une antichaîne non vide de P.

Proposition 4

Soit P un ordre, $A \in P_1$, $x \in A$. Si $d_{P_1}(A) = k$ alors $d_P(x) \geqslant k$.
Corollaire : Soit P un ordre, alors $d(P) \geqslant d(P_1)$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Proposition 2

Si $d_P(x) = k < \infty$ et $x_1 \prec_P \cdots \prec_P x_k = x$ alors $d_P(x_j) = j,\ \forall\, j \in [k]$.

Proposition 3

Si $d(P) < \infty$ *alors* $\forall j \leqslant d(P)$ *avec* $j \in \mathbb{N}^+$, $P(j)$ est une antichaîne non vide de P.

Proposition 4

Soit P un ordre, $A \in P_1$, $x \in A$. Si $d_{P_1}(A) = k$ alors $d_P(x) \geqslant k$.

Corollaire : Soit P un ordre, alors $d(P) \geqslant d(P_1)$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Proposition 2

Si $d_P(x) = k < \infty$ et $x_1 \prec_P \cdots \prec_P x_k = x$ alors $d_P(x_j) = j,\ \forall\, j \in [k]$.

Proposition 3

Si $d(P) < \infty$ *alors* $\forall j \leqslant d(P)$ *avec* $j \in \mathbb{N}^+,\ P(j)$ est une antichaîne non vide de P.

Proposition 4

Soit P un ordre, $A \in P_1$, $x \in A$. Si $d_{P_1}(A) = k$ alors $d_P(x) \geqslant k$.
Corollaire : Soit P un ordre, alors $d(P) \geqslant d(P_1)$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Le théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Propriété 1

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

Preuve théorème

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Induction sur $d(P)$.

-

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Le théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Propriété 1

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

Preuve théorème

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Induction sur $d(P)$.

-

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Le théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Propriété 1

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

Preuve théorème

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Induction sur $d(P)$.

-

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Le théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Propriété 1

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

Preuve théorème

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Induction sur $d(P)$.

- $d(P) = 1$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Le théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Propriété 1

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

Preuve théorème

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Induction sur $d(P)$.

- On suppose la propriété vraie pour P tel que $d(P) \leqslant k - 1$ et $k \geqslant 2$. Soit $d(P) = k < \infty$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Le théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Propriété 1

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

Preuve théorème

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Induction sur $d(P)$.

- On suppose la propriété vraie pour P tel que $d(P) \leqslant k - 1$ et $k \geqslant 2$. Soit $d(P) = k < \infty$

  Nous avons montré que si $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$ alors P_1 est une chaîne et donc la propriété est démontrée, $m \leqslant 2d(P) - 1$.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Le théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Propriété 1

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

Preuve théorème

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Induction sur $d(P)$.

- On suppose la propriété vraie pour P tel que $d(P) \leqslant k - 1$ et $k \geqslant 2$. Soit $d(P) = k < \infty$

  Sinon, le corollaire de la proposition 4 implique que $d(P_2) \leqslant d(P_1) \leqslant d(P)$ et donc $d(P_2) \leqslant d(P) - 1 = k - 1$.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Le théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Propriété 1

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

Preuve théorème

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Induction sur $d(P)$.

- On suppose la propriété vraie pour P tel que $d(P) \leqslant k - 1$ et $k \geqslant 2$. Soit $d(P) = k < \infty$

  Sinon, le corollaire de la proposition 4 implique que $d(P_2) \leqslant d(P_1) \leqslant d(P)$ et donc $d(P_2) \leqslant d(P) - 1 = k - 1$.

  On peut appliquer l'hypothèse d'induction, ainsi il existe r tel que P_{2+r} soit une chaîne et :

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Le théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Propriété 1

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

Preuve théorème

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Induction sur $d(P)$.

- On suppose la propriété vraie pour P tel que $d(P) \leqslant k - 1$ et $k \geqslant 2$. Soit $d(P) = k < \infty$

  On peut appliquer l'hypothèse d'induction, ainsi il existe r tel que P_{2+r} soit une chaîne et :

  $r \leqslant 2d(P) - 1$, or $d(P_2) \leqslant d(P) - 1$,

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Le théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Propriété 1

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

Preuve théorème

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Induction sur $d(P)$.

- On suppose la propriété vraie pour P tel que $d(P) \leqslant k - 1$ et $k \geqslant 2$. Soit $d(P) = k < \infty$

  On peut appliquer l'hypothèse d'induction, ainsi il existe r tel que P_{2+r} soit une chaîne et :

  $r \leqslant 2d(P) - 1$,

  $r \leqslant 2(d(P) - 1) - 1$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Le théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Propriété 1

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

Preuve théorème

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Induction sur $d(P)$.

- On suppose la propriété vraie pour P tel que $d(P) \leqslant k - 1$ et $k \geqslant 2$. Soit $d(P) = k < \infty$

  On peut appliquer l'hypothèse d'induction, ainsi il existe r tel que P_{2+r} soit une chaîne et :

  $r \leqslant 2d(P) - 1$,

  $r \leqslant 2(d(P) - 1) - 1$

  $r \leqslant 2d(P) - 2 - 1$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Le théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Propriété 1

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

Preuve théorème

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Induction sur $d(P)$.

- On suppose la propriété vraie pour P tel que $d(P) \leqslant k - 1$ et $k \geqslant 2$. Soit $d(P) = k < \infty$

  On peut appliquer l'hypothèse d'induction, ainsi il existe r tel que P_{2+r} soit une chaîne et :

  $r \leqslant 2d(P) - 1$,

  $r \leqslant 2(d(P) - 1) - 1$

  $r \leqslant 2d(P) - 2 - 1$

  $r + 2 \leqslant 2d(P) - 1$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Le théorème

Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Propriété 1

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

Preuve théorème

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Induction sur $d(P)$.

- On suppose la propriété vraie pour P tel que $d(P) \leqslant k - 1$ et $k \geqslant 2$. Soit $d(P) = k < \infty$

  On peut appliquer l'hypothèse d'induction, ainsi il existe r tel que P_{2+r} soit une chaîne et :

  $r \leqslant 2d(P) - 1$,

  $r \leqslant 2(d(P) - 1) - 1$

  $r \leqslant 2d(P) - 2 - 1$

  $r + 2 \leqslant 2d(P) - 1$

  La propriété est vérifiée en posant $m = r + 2$.

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Lemme

$\forall k, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant b \leqslant 2k - 1$, il existe un ordre P tel que $d(P) = k$ et b soit la plus petite valeur de m tel que P_m soit une chaîne.

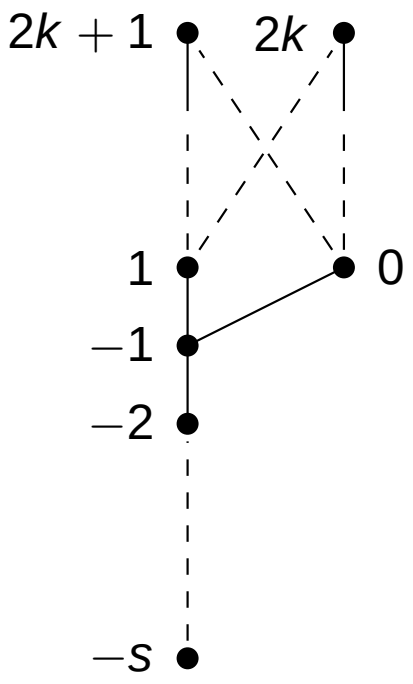
Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Construction de l'ordre

On définit l'ordre $P(s,t)$ comme suit :
Soient $s,t \in \mathbb{N}$, $V(P(s,t)) = \{i : i \in \mathbb{Z} | -s \leqslant i \leqslant t\}$
$\forall\, p,q \in V(P(s,t))$, $p \preceq_{P(s,t)} q$ si :

- $p = q$ ou
- $p < q \leqslant 0$ ou
- $p < q - 1$

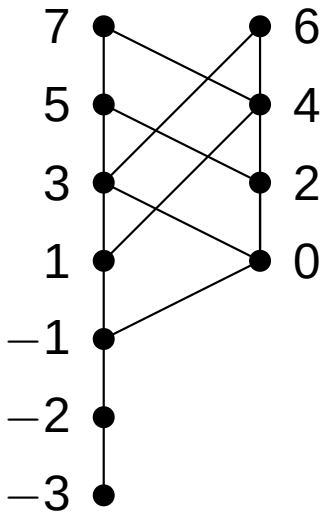
Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d’antichaînes maximales pour l’inclusion
Programmation
Perspectives



$P(s,t)$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

$s = 3$ et $t = 7$, $V(P(s,t)) = \{-3, -2, \cdots, 6, 7\}$



P(s,t)

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Nombre d'antichaîne maximales pour l'inclusion d'un ordre

Cas d'un ordre Fini

Soit P^n tel que $V(P^n) = \{\alpha_{ij} : i, j \in [n]\}$, soient $\alpha_{ij}, \alpha_{kl} \in V(P^n)$, $\alpha_{ij} \prec_{P^n} \alpha_{kl}$ si $i = k$ et $j < l$.

Cas d'un ordre infini

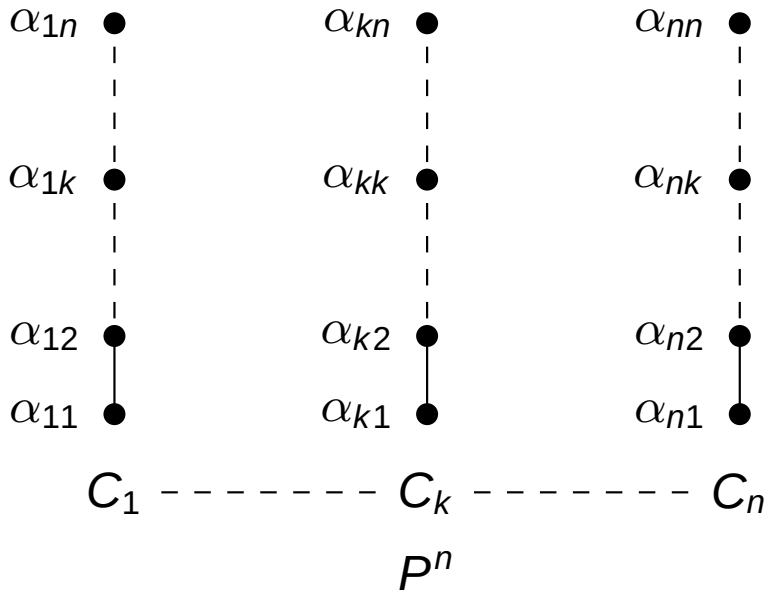
Soit P^N tel que $V(P^N) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soient $a, b \in V(P^N)$, $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$, $a \prec_{P^N} b$ si $a_2 <_{\mathbb{N}} b_2$ et $a_1 = b_1$

- Injection de $2^{\mathbb{N}}$ dans $V(f(P^N))$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Cas d'un ordre Fini

Soit P^n tel que $V(P^n) = \{\alpha_{ij} : i, j \in [n]\}$, soient $\alpha_{ij}, \alpha_{kl} \in V(P^n)$, $\alpha_{ij} \prec_{P^n} \alpha_{kl}$ si $i = k$ et $j < l$.



Cas d'un ordre infini

Soit P^N tel que $V(P^N) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soient $a, b \in V(P^N)$, $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$, $a \prec_{P^N} b$ si $a_2 <_{\mathbb{N}} b_2$ et $a_1 = b_1$

- Injection de $2^{\mathbb{N}}$ dans $V(f(P^N))$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Cas d'un ordre Fini

Soit P^n tel que $V(P^n) = \{\alpha_{ij} : i, j \in [n]\}$, soient $\alpha_{ij}, \alpha_{kl} \in V(P^n)$, $\alpha_{ij} \prec_{P^n} \alpha_{kl}$ si $i = k$ et $j < l$.

- $V(f(P^n)) = \{X \ : \ X \in 2^{V(P^n)} \ : \ \forall i \in [n], \ |X \cup C_i| = 1\}$, avec C_i la $i$ème chaîne de l'ordre P^n
- $|V(f(P^n))| = n^n$
- $|n^n|$ est de l'ordre de l'exponentiel

Cas d'un ordre infini

Soit P^N tel que $V(P^N) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soient $a, b \in V(P^N)$, $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$, $a \prec_{P^N} b$ si $a_2 <_{\mathbb{N}} b_2$ et $a_1 = b_1$

- Injection de $2^{\mathbb{N}}$ dans $V(f(P^N))$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

- $V(f(P^n)) = \{X \ : \ X \in 2^{V(P^n)} \ : \ \forall i \in [n], \ |X \cup C_i| = 1\}$, avec C_i la $i$ème chaîne de l'ordre P^n
- $|V(f(P^n))| = n^n$
- $|n^n|$ est de l'ordre de l'exponentiel

Cas d'un ordre infini

Soit P^N tel que $V(P^N) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soient $a, b \in V(P^N)$, $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$, $a \prec_{P^N} b$ si $a_2 <_{\mathbb{N}} b_2$ et $a_1 = b_1$

- Injection de $2^{\mathbb{N}}$ dans $V(f(P^N))$

- $V(f(P^n)) = \{X \ : \ X \in 2^{V(P^n)} \ : \ \forall i \in [n], \ |X \cup C_i| = 1\}$, avec C_i la $i$ème chaîne de l'ordre P^n
- $|V(f(P^n))| = n^n$
- $|n^n|$ est de l'ordre de l'exponentiel

Cas d'un ordre infini

Soit P^N tel que $V(P^N) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soient $a, b \in V(P^N)$, $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$, $a \prec_{P^N} b$ si $a_2 <_{\mathbb{N}} b_2$ et $a_1 = b_1$

- Injection de $2^{\mathbb{N}}$ dans $V(f(P^N))$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

- $V(f(P^n)) = \{X \ : \ X \in 2^{V(P^n)} \ : \ \forall i \in [n], \ |X \cup C_i| = 1\}$, avec C_i la $i$ème chaîne de l'ordre P^n
- $|V(f(P^n))| = n^n$
- $|n^n|$ est de l'ordre de l'exponentiel

Cas d'un ordre infini

Soit P^N tel que $V(P^N) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soient $a, b \in V(P^N)$, $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$, $a \prec_{P^N} b$ si $a_2 <_{\mathbb{N}} b_2$ et $a_1 = b_1$

- Injection de $2^{\mathbb{N}}$ dans $V(f(P^N))$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Cas d'un ordre infini

Soit P^N tel que $V(P^N) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soient $a, b \in V(P^N)$, $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$, $a \prec_{P^N} b$ si $a_2 <_{\mathbb{N}} b_2$ et $a_1 = b_1$

- Injection de $2^{\mathbb{N}}$ dans $V(f(P^N))$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Cas d'un ordre infini

Soit P^N tel que $V(P^N) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soient $a, b \in V(P^N)$, $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$, $a \prec_{P^N} b$ si $a_2 <_{\mathbb{N}} b_2$ et $a_1 = b_1$

- Injection de $2^{\mathbb{N}}$ dans $V(f(P^N))$

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Programmation

Objectifs

- Étudier les propriétés structurelles des ordres intermédiaires lors de la transformation
- Vérifier la validité de la borne sur des ordres particuliers

Moyens

- Langage ensembliste ISETL
- Fonctions de bases (hauteur, rang ...)
- Algorithme de calcul des antichaînes maximales pour l'inclusion d'un ordre

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Programmation

Objectifs

- Étudier les propriétés structurelles des ordres intermédiaires lors de la transformation
- Vérifier la validité de la borne sur des ordres particuliers

Moyens

- Langage ensembliste ISETL
- Fonctions de bases (hauteur, rang ...)
- Algorithme de calcul des antichaînes maximales pour l'inclusion d'un ordre

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Programmation

Objectifs

- Étudier les propriétés structurelles des ordres intermédiaires lors de la transformation
- Vérifier la validité de la borne sur des ordres particuliers

Moyens

- Langage ensembliste ISETL
- Fonctions de bases (hauteur, rang ...)
- Algorithme de calcul des antichaînes maximales pour l'inclusion d'un ordre

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Programmation

Objectifs

- Étudier les propriétés structurelles des ordres intermédiaires lors de la transformation
- Vérifier la validité de la borne sur des ordres particuliers

Moyens

- Langage ensembliste ISETL
- Fonctions de bases (hauteur, rang ...)
- Algorithme de calcul des antichaînes maximales pour l'inclusion d'un ordre

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Programmation

Objectifs

- Étudier les propriétés structurelles des ordres intermédiaires lors de la transformation
- Vérifier la validité de la borne sur des ordres particuliers

Moyens

- Langage ensembliste ISETL
- Fonctions de bases (hauteur, rang ...)
- Algorithme de calcul des antichaînes maximales pour l'inclusion d'un ordre

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Programmation

Objectifs

- Étudier les propriétés structurelles des ordres intermédiaires lors de la transformation
- Vérifier la validité de la borne sur des ordres particuliers

Moyens

- Langage ensembliste ISETL
- Fonctions de bases (hauteur, rang ...)
- Algorithme de calcul des antichaînes maximales pour l'inclusion d'un ordre

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Programmation

Objectifs

- Étudier les propriétés structurelles des ordres intermédiaires lors de la transformation
- Vérifier la validité de la borne sur des ordres particuliers

Moyens

- Langage ensembliste ISETL
- Fonctions de bases (hauteur, rang ...)
- Algorithme de calcul des antichaînes maximales pour l'inclusion d'un ordre

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d’antichaînes maximales pour l’inclusion
Programmation
Perspectives

Perspectives

- L’étude des propriétés structurelles des ordres intermédiaires lors de la transformation
- L’amélioration de la borne pour des classes d’ordres particulières

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion
Programmation
Perspectives

Perspectives

- L'étude des propriétés structurelles des ordres intermédiaires lors de la transformation
- L'amélioration de la borne pour des classes d'ordres particulières

Notions introductives
Principe
Énoncé du théorème
Résultats préliminaires
Le théorème
Lemme
Nombre d’antichaînes maximales pour l’inclusion
Programmation
Perspectives

Perspectives

- L’étude des propriétés structurelles des ordres intermédiaires lors de la transformation
- L’amélioration de la borne pour des classes d’ordres particulières