Etude des points fixes de la puissance de l'application de Kong - Ribenboim

Del Mondo Géraldine

14th June 2006

Ce travail porte sur l'étude du Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris intitulé "Chaining partially ordered sets" écrit par Tat Yung Kong et Paulo Ribenboim. Dans une première partie, nous détaillerons le contenu de cet article qui présente un théorème sur une borne maximale du nombre d'itérations nécessaires pour transformer un ordre quelconque en un ordre total. Ce processus de transformation peut être décrit sous la forme d'un algorithme qui à chaque pas calcule l'ensemble des antichaînes maximales de l'ordre considéré ordonné selon une relation particulière, permettant d'obtenir un nouvel ordre. Dans une seconde partie nous aborderons un problème qui s'est posé en cours de la lecture de cette C.R.A.S., à savoir le nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion d'un ordre (fini ou infini). Nous terminerons par une ébauche de l'implémentation du processus de calcul de la borne citée dans le théorème.

Contents

1 Etude de l'article : "Chaining partially ordered sets" 2
1.1 Notions introductives . . . 2
1.2 Présentation effective de la C.R.A.S . . . 3
1.2.1 L'algorithme . . . 3
1.2.2 Résultats préliminaires . . . 4
1.2.3 Le théorème : borne supérieure du nombre d'itérations . . . 7
1.2.4 Proposition 5 : preuve que la borne supérieure du nombre d'itérations peut être atteinte 9
1.3 Commentaires . . . 10
1.3.1 Nombre d'antichaînes maximales d'un ordre . . . 10
1.3.2 Amélioration de la borne pour des classes d'ordres particulières . . . 10

2 Nombre d'antichaînes maximales d'un ordre 11
2.1 Cas d'un ordre fini . . . 11
2.2 Cas d'un ordre infini . . . 12

3 Programmation/Algorithmique 13
3.1 Représentation del'ordre en ISETL . . . 13
3.2 Les fonctions de bases . . . 13
3.3 Les fonctions annexes . . . 15
3.4 Le calcul des antichaînes maximales pour l'inclusion . . . 15
3.5 L'algorithme global : calcul de la borne . . . 16

1 Etude de l'article : "Chaining partially ordered sets"

ℹ Dans cette section, on utilise les notations propres aux auteurs de la CRAS et non celles le plus souvent usitées en théorie des ordres.

Nous présentons un algorithme qui, appliqué à un *ordre* dont la *hauteur* est bornée par k, produit un *ordre total* (une *chaîne*) en au plus $2k-1$ itérations.

Plus précisément, nous commencerons par rappeler quelques notions utiles à la compréhension de ce document. Ensuite, nous présenterons un algorithme capable de calculer le nombre d'itérations cité ci-dessus. Enfin, nous serons amené à démontrer un certains nombre de propriétés dans le but de prouver l'existence de cette borne du nombre d'itérations $m \leqslant 2d(P)-1$. Dans une dernière sous partie nous proposerons quelques commentaires personnels qui seront détaillés dans la section suivante.

1.1 Notions introductives

- ☞ Un *ordre strict* P est un couple $(V(P), <_P)$ avec $V(P)$ un ensemble d'éléments et $<_P$ une *relation d'ordre* sur ces éléments.

  Dans la suite du document, on pourra confondre les deux expressions "l'ordre P" et "P".

  ℹ On note $\mathcal{O}$ la classe des ordres.

- ☞ Une *relation d'ordre stricte* $<_P$ est une relation binaire transitive ($\forall x, y, z \in V(P)$, si $x <_P y$ et $y <_P z$ alors $x <_P z$) et antiréflexive ($\forall x \in V(P)$, $(x,x) \notin V(P) \times V(P)$) de base $V(P)$.

  ℹ Un *ordre large* P est un couple $(V(P), \leqslant_P)$ tel que $(V(P), <_P)$ soit un ordre strict et $\leqslant_P = <_P \cup \{(x,x) : x \in V(P)\}$.

- ☞ Soit l'ordre $P = (V(P), <_P)$, $x, y \in V(P)$ sont dits *comparables* dans P si $x <_P y$ *ou* $y <_P x$, (noté $x \sim_P y$) ils sont dits *incomparables* (noté $x \parallel_P y$) sinon.

- ☞ Dans un *ordre total* tous les éléments sont deux à deux comparables.

- ☞ Une *chaîne* dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux comparables dans P. Le sous-ordre induit par les éléments d'une *chaîne* est un ordre total.

- ☞ Une *antichaîne* dans un ordre P est un sous-ensemble de $V(P)$ d'éléments deux à deux incomparables dans P.

  ℹ Souvent on confond l'ensemble des sommets constituant une chaîne (respectivement une antichaîne) et l'ordre induit par cet ensemble.

- ☞ L'ensemble des *prédécesseurs* $\downarrow_P^{[} x$ d'un élément $x \in V(P)$ est l'ensemble des éléments $z \in V(P)$ tels que $z <_P x$.

  ℹ Cet ensemble est appelé l'*idéal strict* de x.

- ☞ L'ensemble des *successeurs* $\uparrow_P^{[} x$ d'un élément $x \in V(P)$ est l'ensemble des éléments $z \in V(P)$ tels que $x <_P z$.

  ℹ Cet ensemble est appelé le *filtre strict* de x.

- ☞ Le *rang* de x $d_P(x)$ dans l'ordre P est la taille maximale d'une chaîne de P se terminant par x. Usuellement ce nombre commence à 0, ici il est calculé à partir de l'entier 1.

  ℹ Soit $P(k) = \{x : x \in V(P) : d_P(x) = k\}$, qui représente l'ensemble de tous les éléments de l'ordre P de même rang.

- ☞ La *hauteur* $d(P)$ est le nombre d'éléments d'une plus longue chaîne de P, ici bornée par k. Usuellement on calcule ce nombre à partir de 0, dans ce document k commence à l'entier 1.

1.2 Présentation effective de la C.R.A.S

1.2.1 L'algorithme

Soit P_i un ordre large, on désigne par P_{i+1} l'ordre large tel que :

- $P_0 = P$.
- $\forall\ i \geqslant 1$, $P_{i+1} = f(P_i)$, avec $f : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $(V(P_i),\ \preceq_{P_i}) \to (V(P_{i+1}),\ \preceq_{P_{i+1}})$.
- $V(P_{i+1})$ est l'ensemble des antichaînes maximales (pour l'inclusion)[1] de P_i.
- $\preceq_{P_{i+1}}$ est telle que pour A_1, $A_2 \in\ V(P_{i+1})$, $A_1 \prec_{P_{i+1}} A_2 \Leftrightarrow \forall x \in A_1\ \exists y \in A_2$ tel que $x \prec_{P_i} y$.

  ℹ On a donc $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

  ℹ On dit que tous les éléments de A_1 sont *majorés* par des éléments de A_2.

ℹ P_{i+1} peut contenir beaucoup[2] plus d'éléments que P_i (P_i fini ou non).

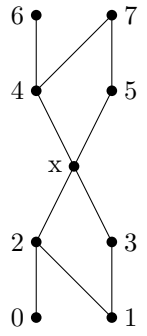
L'algorithme nous permet de calculer le nombre d'itérations i nécessaire à l'obtention de l'ordre total à partir de P.

Algorithme(P) :

① Si P est une chaîne alors on s'arrête (l'ordre est total)

② Sinon, on remplace $(P, \preceq_P)$ par $(P_1, \preceq_{P_1})$
On retourne à l'étape ①.

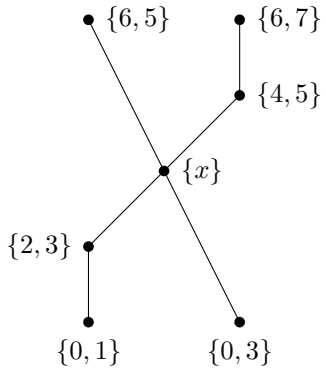
Soit l'exemple d'exécution suivant :



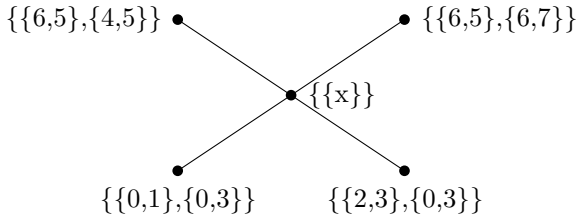
Les antichaînes maximales de P sont : $\{0,1\}; \{0,3\}; \{2,3\}; \{x\}; \{4,5\}; \{6,5\}; \{6,7\}$. D'où P_1 :

[1] Quelque soit l'élément ajouté ce n'est plus une antichaine

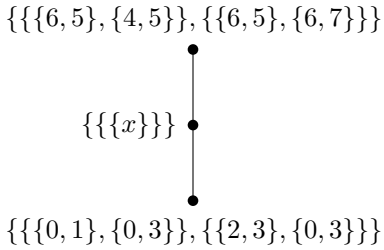
[2] Dans le cas où P est fini, $|V(P_{i+1})|$ peut être de l'ordre de $e^{|V(P_i)|}$. Dans le cas où P est infini il y a changement de classe d'équivalence.



Les antichaînes maximales de P_1 sont : $\{\{0,1\},\{0,3\}\}; \{\{2,3\},\{0,3\}\}; \{\{x\}\}; \{\{6,5\},\{4,5\}\}; \{\{6,5\},\{6,7\}\}$.
D'où P_2 :



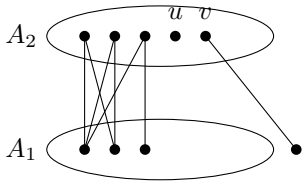
Les antichaînes maximales de P_2 sont : $\{\{\{0,1\},\{0,3\}\},\{\{2,3\},\{0,3\}\}\}; \{\{\{x\}\}\}; \{\{\{6,5\},\{4,5\}\},\{\{6,5\},\{6,7\}\}\}$.
D'où l'ordre total final :



1.2.2 Résultats préliminaires

Proposition 1 Il s'agit de montrer que dans un ordre P, si l'on a deux antichaînes telles que $A_1 \prec_{P_1} A_2$ alors tous les éléments de l'antichaîne A_2 sont minorés par des éléments de l'antichaine A_1.

Dans le dessin ci-dessous, cela signifie que l'on veut prouver qu'il n'existe pas d'élément tels que u et v.

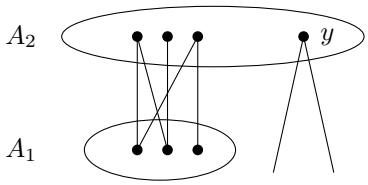


On va donc montrer la proposition énoncée ci-dessous, la preuve est inspirée de celle contenue dans la CRAS mais plus détaillée.

Soit P un ordre large et soient $A_1, A_2 \in V(P_1)$, alors :
$A_1 \prec_{P_1} A_2 \Leftrightarrow \forall\ y \in A_2,\ \exists\ x \in A_1$ *tel que* $x \prec_P y$

- ($\Rrightarrow$) On suppose $A_1 \prec_{P_1} A_2$.

  Par l'absurde, on suppose qu'il existe $y \in A_2$ tel que $A_1 \cap \downarrow_P^{[} y = \varnothing$. On se retrouve dans le cas du schéma ci - dessous où l'idéal strict de y de contient pas d'élément de A_1.



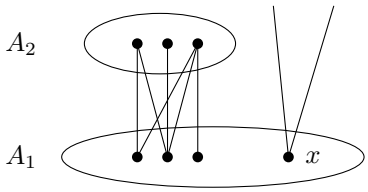
  Comme A_1 est une antichaîne maximale pour l'inclusion alors il existe $x \in A_1$ tel que $y \preceq_P x$.

  Comme $A_1 \prec_{P_1} A_2$ alors il existe $z \in A_2$ tel que $x \prec_P z$,

  ce qui implique que $y \prec_P z$: contradiction avec le fait que A_2 soit une antichaîne.

- ($\Lleftarrow$) On suppose que $\forall\ y \in A_2,\ \exists\ x \in A_1$ tel que $x \prec_P y$. On veut montrer que $A_1 \prec_{P_1} A_2$, c'est à dire que $\forall\ x \in A_1,\ \exists\ y \in A_2$ tel que $x \prec_P y$.

  Par l'absurde, on suppose qu'il existe $x \in A_1$ tel que $A_2 \cap \uparrow_P^{[} x = \varnothing$. On se retrouve dans le cas du schéma ci - dessous où le filtre strict de x ne contient pas d'élément de A_2 :



  Comme A_2 est une antichaîne maximale pour l'inclusion alors il existe $y \in A_2$ tel que $y \preceq_P x$.

  Or, par hypothèse sur A_2, il existe $z \in A_1$ tel que $z \prec_P y$,

  ce qui implique que $x \prec_P z$: contradiction avec le fait que A_1 soit une antichaîne.

  On a donc montré que $\forall\ x \in A_1,\ \exists\ y \in A_2$ tel que $x \prec_P y$, c'est à dire $A_1 \prec_{P_1} A_2$.

❑

Proposition 2 $\boxed{\text{Si } d_P(x) = k < \infty \text{ et } x_1 \prec_P \cdots \prec_P x_k = x \text{ alors } d_P(x_j) = j,\ \forall\ j \in [k].}$

- Par définition du rang $\forall\ j \in [k],\ d_P(x_j) \geqslant j$.

- Par l'absurde, on suppose qu'il existe $i \in [k]$ tel que $d_P(x_i) = l > i$, donc il existe une chaîne $y_1 \prec_P \cdots \prec_P y_l$ telle que $y_l = x_i$.

  Ainsi, soit c la chaîne de P $y_1 \prec_P \cdots \prec_P y_l \prec_P x_{i+1} \prec_P \cdots \prec_P x_k$.

  $|c| = (l - 1 + 1) + (k - (i + 1) + 1) = k + l - i$.

  Or $l > i$, d'où $l - i > 0$ et donc $|c| > k$.

  On a, de ce fait, une contradiction avec la définition du rang et $d_P(x) = k$.

❑

Proposition 3 $\boxed{\text{Si } d(P) < \infty \textit{ alors } \forall j \leqslant d(P) \textit{ avec } j \in \mathbb{N}^+,\ P(j) \text{ est une antichaîne non vide de } P.}$

- On commence par montrer que si l'antichaîne $P(j)$ existe, elle n'est pas vide :

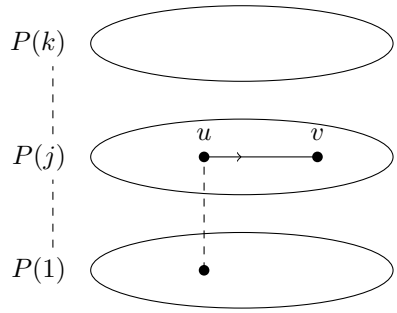
  Puisque $d(P) < \infty$, il existe $k < \infty$ tel que $d(P) = k$. C'est à dire qu'il existe $x \in V(P)$ tel que $d_P(x) = k$.

  Donc il existe une chaîne $x_1 \prec_P \cdots \prec_P x_k = x$.

  Ainsi, par la proposition 2, $\forall\ j \in [k],\ d_P(x_j) = j$, donc $x_j \in P(j)$ ce qui prouve que $P(j) \neq \varnothing$.

- Il reste à montrer que l'existence de l'antichaîne $P(j)$.

  Par l'absurde, on suppose que $P(j)$ n'est pas une antichaîne de P. Donc il existe $u, v \in P(j)$ tels que $u \prec_P v$ (voir le dessin ci-contre).



  Comme $u \in P(j)$, il existe une chaîne $x_1 \prec_P \cdots \prec_P x_j = u$.

  Donc on obtient $x_1 \prec_P \cdots \prec_P x_{j-1} \prec_P u \prec_P v$, d'où $d_P(v) > j$: contradiction avec $d_P(v) = j$.

❑

Proposition 4 $\boxed{\text{Soit } P \text{ un ordre, } A \in P_1,\ x \in A. \text{ Si } d_{P_1}(A) = k \text{ alors } d_P(x) \geqslant k.}$

Nous allons effectuer une preuve par induction, il s'agit de montrer l'existence d'une chaîne se terminant par x dans P. Soit la propriété à prouver suivante :

$$H(i)\ :\ \forall\ x \in A_i\ \exists\ \alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}\ \in V(P) \textit{ tels que } \alpha_1 \prec_P \cdots \prec_P \alpha_{i-1} \prec_P x$$

$H(i)$ n'est défini que pour tout $i \in [k]$.

- $H(1)$ est trivialement vraie.
- Soit $1 \leqslant j < k$ tel que $H(j)$ soit vraie. Montrons $H(j+1)$:

  On a : $A_1 \prec_{P_1} \cdots \prec_{P_1} A_j \prec_{P_1} A_{j+1}$.

  Soit $x \in A_{j+1}$, d'après la proposition 1, il existe $y \in A_j$ tel que $y \prec_P x$.

  Par hypothèse d'induction, il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}\ \in V(P)$ tels que $\alpha_1 \prec_P \cdots \prec_P \alpha_{j-1} \prec_P y$,

  donc $\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1} \prec_P y \prec_P x$, ce qui prouve $H(j+1)$.

  Donc $\forall\ i \in [k]$, $H(i)$ est vraie.

En particulier, $H(k)$ est vraie et donc $\forall\ x \in A$, comme $A = A_k$, $d_P(x) \geqslant k$.

On peut remarquer que si $A \in P_1$ alors $d_{P_1}(A) = d(P_1)$, d'où le corollaire suivant :

$\boxed{\text{Soit } P \text{ un ordre, alors } d(P) \geqslant d(P_1)}$

❑

1.2.3 Le théorème : borne supérieure du nombre d'itérations

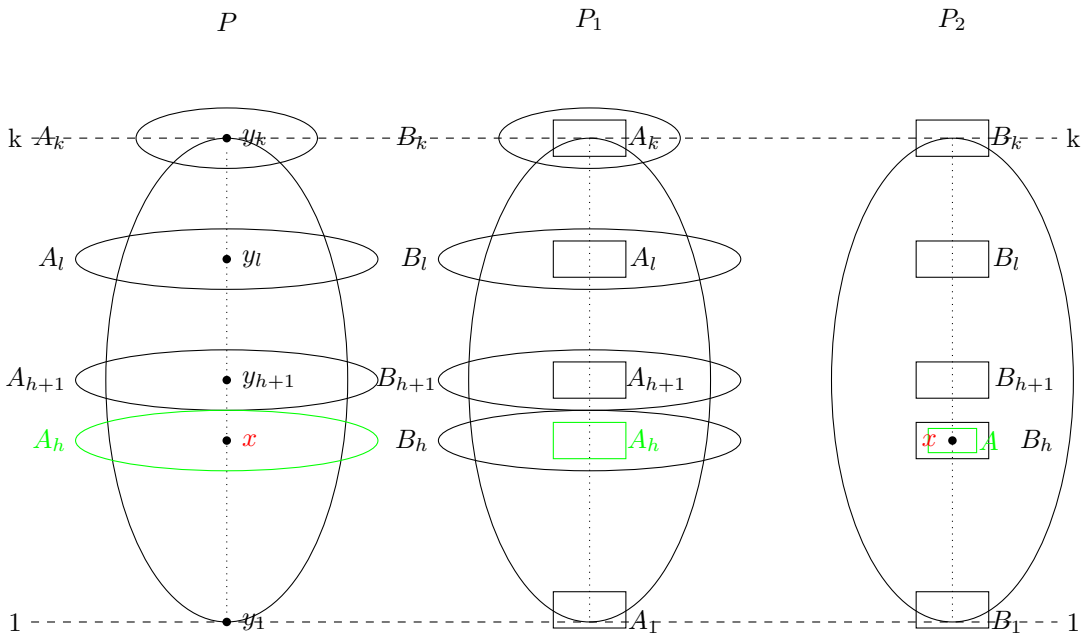
Soit P un ordre tel que $d(P) < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.

Nous allons démontrer ce théorème en prouvant deux propriétés :

Soit P un ordre non vide tel que $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$, alors P_1 est une chaîne.

et

Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$, alors il existe $m \leqslant 2d(P) - 1$ tel que P_m soit une chaîne.



un sommet $\equiv$ • *ou* □

Preuve propriété 1 :
Soit P tel que $d(P) = k$ $(k < \infty)$. Soient $B_1, \cdots, B_h, \cdots, B_k \in V(P_2)$ tels que

$$B_1 \prec_{P_2} B_2 \prec_{P_2} \cdots \prec_{P_2} B_h \prec_{P_2} \cdots \prec_{P_2} B_k$$

.

Par la Proposition 2, $\forall\ h \in [k], d_{P_2}(B_h) = h$.

- **On va montrer que** $\forall\ h \in [k]$**,** $B_h = \{P(h)\}$**, c'est à dire** $B_h = \{\{x : x \in V(P) \mid d_P(x) = h\}\}$**.**

  Soit $A_h \in B_h$,

  par la Proposition 4, sous les hypothèses que $B_h \in V(P_2)$, $d_{P_2}(B_h) = h$ et $A_h \in B_h$, on a $d_{P_1}(A_h) \geqslant h$.

  Soit $x \in A_h$,

  toujours par la Proposition 4, sous les hypothèses $A_h \in V(P_1)$, $d_{P_1}(A_h) \geqslant h$ et $x \in A_h$, on a $d_P(x) \geqslant h$.

Comme on a $B_h \prec_{P_2} B_{h+1} \prec_{P_2} \cdots \prec_{P_2} B_k$, et comme $P_2 = f(P_1)$, il existe $A_{h+1}, \cdots, A_k \in V(P_1)$ tels que $\forall\ l \in [h+1, k]$, $A_l \in B_l$.

De la même façon, comme on a maintenant $A_h \prec_{P_1} A_{h+1} \prec_{P_1} \cdots \prec_{P_1} P_k$, et comme $P_1 = f(P)$, il existe $y_{h+1}, \cdots y_k \in V(P)$ tels que $\forall\ l \in [h+1, k]$, $y_l \in A_l$.

Par conséquent : $x \prec_P y_{h+1} \prec_P \cdots \prec_P y_k$.

Comme $d(P) = k$, on obtient donc $d_P(x) \leqslant h$. Or, on a montré que $d_P(x) \geqslant h$, donc $d_P(x) = h$.

(1) Ainsi $\forall\ x \in A_h$ on a $d_p(x) = h$, et donc $A_h \subseteq P(h)$. (Par la Proposition 3, on assure que $P(h)$ est une antichaîne non vide de P).

(2) Comme par définition, $P_1 = f(P)$, A_h est donc une antichaîne maximale pour l'inclusion de P.

Donc, par (1) et (2), on obtient que $A_h = P(h)$.

Comme $P_2 = f(P_1)$ et $B_h \in V(P_2)$, alors B_h est une antichaîne maximale pour l'inclusion de P_1. Par ce qui précède on peut conclure que $B_h = \{P(h)\}$.

- **On va maintenant montrer que P_1 est la chaîne $(P(1), \cdots, P(k))$:**
  Comme $\forall\ h \in [k]$, $B_h = \{P(h)\}$ et $P(h) \in P_1$ donc $\{P(1), \cdots, P(k)\} \subseteq V(P_1)$.

  Comme $B_1 \prec_{P_2} \cdots \prec_{P_2} B_h \prec_{P_2} \cdots \prec_{P_2} B_k$, on sait que $P(1) \prec_{P_1} \cdots \prec_{P_1} P(h) \prec_{P_1} \cdots \prec_{P_1} P(k)$.

  Il reste à montrer que $V(P_1) \subseteq \{P(1), \cdots, P(k)\}$.

  Par contradiction soit $S \in V(P_1) \backslash \{P(1), \cdots, P(k)\}$ et soit $x \in S$.
  comme $B_{d_{P(x)}} = \{P(d_{P(x)})\}$ est une antichaîne maximale pour l'inclusion de P_1, il s'en suit que S et $P(d_{P(x)})$ sont comparables dans P_1.

  Par conséquent, $S \cap P(d_{P(x)}) = \emptyset$ ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle x est dans S.

  Donc $V(P_1) \subseteq \{P(1), \cdots, P(k)\}$, ainsi P_1 est la chaîne $(P(1), \cdots, P(k))$.

❑

Preuve propriété 2 :
Soit P un ordre et $d(P) = k < \infty$. Nous allons faire une induction sur $d(P)$.

- $d(P) = 1$: P est réduit à une antichaîne donc P_1 est une chaîne. Nous avons réalisé $1 = 2 \times 1 - 1 = m$ itérations. La propriété est vraie.
- On suppose la propriété vraie pour P tel que $d(P) \leqslant k - 1$ et $k \geqslant 2$. Soit $d(P) = k < \infty$

  Nous avons montré que si $d(P_2) = d(P_1) = d(P)$ alors P_1 est une chaîne et donc la propriété est démontrée, $m \leqslant 2d(P) - 1$.

  Sinon, le corollaire de la proposition 4 implique que $d(P_2) \leqslant d(P_1) \leqslant d(P)$ et donc $d(P_2) \leqslant d(P) - 1 = k - 1$.

  On peut appliquer l'hypothèse d'induction, ainsi il existe r tel que P_{2+r} soit une chaîne et :

  $r \leqslant 2d(P) - 1$, or $d(P_2) \leqslant d(P) - 1$,

  $r \leqslant 2(d(P) - 1) - 1$

  $r \leqslant 2d(P) - 2 - 1$

  $r + 2 \leqslant 2d(P) - 1$

  La propriété est vérifiée en posant $m = r + 2$. ❑

1.2.4 Proposition 5 : preuve que la borne supérieure du nombre d'itérations peut être atteinte

Dans cette partie on montre que la borne m maximale est atteinte. Pour cela on construit un ordre particulier, soit le lemme suivant :

> $\forall k, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant b \leqslant 2k-1$, il existe un ordre P tel que $d(P) = k$ et b soit la plus petite valeur de m tel que P_m soit une chaîne.

- On définit l'ordre $P(s,t)$ comme suit :

  Soient $s, t \in \mathbb{N}$, $V(P(s,t)) = \{i : i \in \mathbb{Z} | -s \leqslant i \leqslant t\}$

  $\forall\ p, q \in V(P(s,t))$, $p \preceq_{P(s,t)} q$ si :

  - $p = q$ ou
  - $p < q \leqslant 0$ ou
  - $p < q - 1$

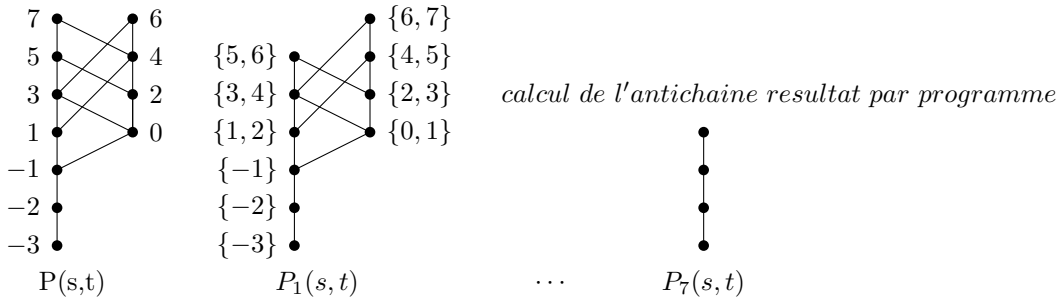
  Pour appliquer l'algorithme, il faut calculer les antichaînes maximales de cet ordre, deux remarques :

  - Quand $t = 0$, $P(s,t)$ est une chaîne.
  - Quand $t > 0$, les antichaînes maximales de $P(s,t)$ sont :

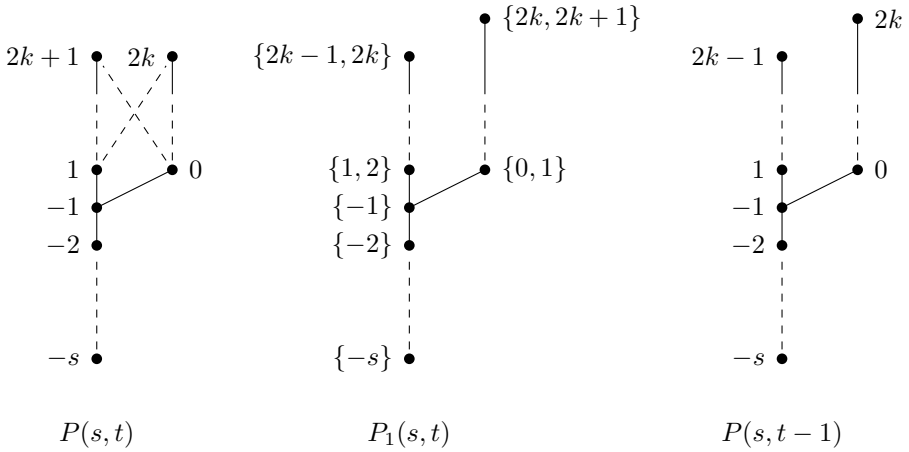
    Les singletons constitués d'un entier pris dans $[-s, 0[$.

    Les paires composées de deux entiers consécutifs pris dans $[0, t]$.

  Voici un exemple avec $s = 3$ et $t = 7$, on a donc $V(P(s,t)) = \{-3, -2, \cdots, 6, 7\}$ et :



- Généralisation



On peut remarquer que $P_1(s,t)$ est isomorphe à $P(s,t-1)$. On a donc que $d(P_1(s,t)) = d(P(s,t-1))$.

Soit $\varphi : V(P_1(s,t)) \to V(P(s,t-1)), x \to min(x)$ où min est la fonction usuelle renvoyant le minimum d'un ensemble.

Le nombre d'itérations nécessaires pour que $P(s,t)$ soit une chaîne est égal à t.

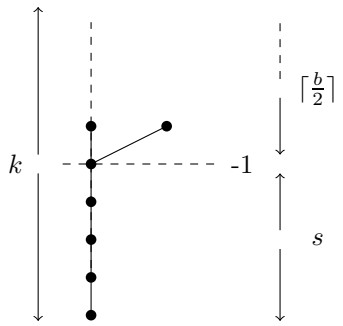
Pour tout b tel que $0 \leqslant b \leqslant 2k-1$ il existe un ordre P_b de hauteur k tel que le nombre d'itération maximal pour que P_b soit une chaîne est égal à b.

Détermination de P_b, expression de s et t :

On veut que le nombre d'itération pour obtenir une chaîne à partir de P_b soit égal à b. Par ailleurs pour $P(s,t)$, le nombre d'itérations nécessaire est t, donc en posant $P_b = P(s,b)$ on a le résultat voulu.

Il reste maintenant à choisir s de manière à ce que $P(s,b)$ soit un ordre de hauteur k.

On remarque :



Comme $b \leqslant 2k-1$ alors $b+1 \leqslant 2k$,

ce qui implique que $\frac{b+1}{2} \leqslant k$.

Comme de plus la hauteur ne peut être qu'un nombre entier, on obtient

$\lceil \frac{b+1}{2} \rceil \leqslant k$

et donc :

$k = \lceil \frac{b+1}{2} \rceil + s$, avec $s \geqslant 0$

Ainsi, pour k et b fixés on choisit $s = k - \lceil \frac{b+1}{2} \rceil$ ❑

1.3 Commentaires

1.3.1 Nombre d'antichaînes maximales d'un ordre

L'algorithme étudié dans cette C.R.A.S nécessite le calcul des antichaînes maximales d'un ordre. La question du nombre de telles antichaînes est interressante que l'ordre soit fini ou non. Dans le cas des ordres finis, l'algorithme peut utilisable si les ordres sont bien formés et pas trop grands.

1.3.2 Amélioration de la borne pour des classes d'ordres particulières

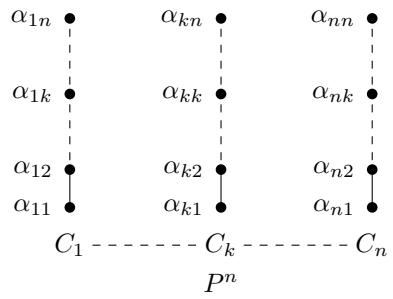
Cette C.R.A.S nous permet de connaître une borne maximale pour le nombre d'itérations nécessaires jusqu'à l'obtention d'une chaîne à partir d'un ordre quelconque. On peut se demander s'il n'est pas possible d'améliorer cette borne pour des classes d'ordres particulières comme par exemple la classe des ordres N-Free ou la classe des ordres série-parallèle.

2 Nombre d'antichaînes maximales d'un ordre

Dans cette section, il s'agit de montrer, dans le cas d'un ordre fini que le nombre d'antichaînes maximales générées peut être exponentiel, et dans le cas d'un ordre infini, du changement de classe d'équivalence de ce nombre. Ceci en référence à la remarque de la section 1 lors de la présentation de l'algorithme.

2.1 Cas d'un ordre fini

Soit P^n tel que $V(P^n) = \{\alpha_{ij} : i, j \in [n]\}$, soient $\alpha_{ij}, \alpha_{kl} \in V(P^n)$, $\alpha_{ij} \prec_{P^n} \alpha_{kl}$ si $i = k$ et $j < l$.



Dans un premier temps il s'agit de montrer que le nombre d'antichaînes maximales générées, $|V(f(P^n))| = n^n$, ensuite il sera démontré que ce nombre est de l'ordre de l'exponentiel.

- Montrons $|V(f(P^n))| = n^n$.

  Détermination de l'ensemble $V(f(P^n))$.
  Soit $\mathcal{F} = \{X \ : \ X \in 2^{V(P^n)} \ : \ \forall i \in [n], \ |X \cup C_i| = 1\}$, avec C_i la *ime* chaîne de l'ordre P^n (voir schéma).
  ① $V(f(P^n)) \subseteq \mathcal{F}$

  Soit $a \in V(f(P^n))$, a est une antichaîne maximale pour l'inclusion de P^n. Supposons que $a \notin \mathcal{F}$: $\exists i \in [n]$ tel que

  * Soit, $|a \cap C_i| > 1$, alors il existe au moins deux éléments communs à a et C_i. Soient α et β, comme $\alpha, \beta \in C_i$ alors $\alpha \sim_{P^n} \beta$, or $\alpha, \beta \in a$ qui est une antichaîne, d'où la contradiction.
  * Soit, $|a \cap C_i| = 0$. Soit $\gamma \in C_i$, par définition de P^n on a $\forall \ \alpha \in a$, $\gamma \parallel_{P^n} \alpha$, ce qui signifie que l'on peut augmenter la cardinalité de a, contradiction avec la maximalité de l'antichaîne a.

  Donc $V(f(P^n)) \subseteq \mathcal{F}$.
  ② $\mathcal{F} \subseteq V(f(P^n))$

  Soit $x \in \mathcal{F}$, supposons que $x \notin V(f(P^n))$:

  * Supposons que x n'est pas une antichaîne de P^n, alors il existe $\alpha, \beta \in x$ tels que $\alpha \sim_{P^n} \beta$. Donc il existe $i \in [n]$ tel que $\alpha, \beta \in C_i$, ceci implique que $|x \cap C_i| > 1$, d'où la contradiction avec la définition de l'ensemble $\mathcal{F}$.
  * Supposons que x n'est pas une antichaîne maximale pour l'inclusion, alors il existe $\gamma \in V(P^n) \backslash x$ tel que $\{\gamma\} \cup x$ soit une antichaîne. Or, il existe $i \in [n]$ tel que $\gamma \in C_i$, donc $|x \cap C_i| = 0$ (x antichaîne) contradiction.

  Donc $\mathcal{F} \subseteq V(f(P^n))$.

  Montrons $|V(f(P^n))| = n^n$.
  Soit $\phi : [n]^n \to V(f(P^n))$, $(z_1, \cdots, z_n) \ \to \ \bigcup_{i=1}^{n} \{\alpha_{iz_i}\}$ avec $\forall i \in [n]$ $z_i \in [n]$, (voir schéma).
  Montrons que φ est une bijection :

* Montrons que φ est injective : soit $x, y \in [n]^n$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$, avec $x \neq y$. Alors il existe $i \in [n]$ tel que $x_i \neq y_i$, donc $\alpha_{ix_i} \neq \alpha_{iy_i}$, et comme par construction on a $\forall\ k, k',\ \forall\ t,\ \alpha_{kt} \neq \alpha_{k't}$, alors $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ donc φ injective.
* Montrons que φ est surjective : soit $z \in V(f(P^n))$, soit $t = (t_1, \cdots, t_n)$ tel que $\forall\ i \in [n],\ t_i = d_{P^n}(z_i)$ avec $\{z_i\} = z \cap C_i$. Par définition de $V(f(P))$, $\{z_i\}$ est bien défini et on a $1 \leqslant t_i \leqslant n$. Donc $t \in [n]^n$, et comme par construction on a $\alpha_{it_i} = z_i$ alors $\varphi(t) = z$ donc φ est surjective.

On a prouvé que $|V(f(P^n))| = n^n$

- Montrons que n^n est de l'ordre de l'exponentiel.

  Supposons que n^n soit majoré par une fonction polynomiale, alors $\exists\ k \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant n_0$ on a $n^n \leqslant \alpha_k n^k$. Ce qui équivaut à $n^{n-k} \leqslant \alpha_k$ pour $n_0 \neq 0$.

  – Si l'on prend $n \geqslant max(n_0, k+1)$ alors $n \leqslant \alpha_k$
  – Si l'on prend $n \geqslant max(n_0, k+1, \alpha_k + 1)$ alors $n \geqslant \alpha_k + 1$

  D'où la contradiction, et par conséquent n^n n'est pas majorée par une fonction polynomiale, le nombre d'antichaîne maximales pour l'inclusion d'un ordre fini peut par conséquent être de l'ordre de l'exponentielle en la taille de l'ordre.

2.2 Cas d'un ordre infini

Soit P^N tel que $V(P^N) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soient $a, b \in V(P^N)$, $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$, $a \prec_{P^N} b$ si $a_2 <_{\mathbb{N}} b_2$ et $a_1 = b_1$

On sait que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable car il est en bijection avec $\mathbb{N}$. On veut montrer que $V(f(P^N))$ n'est pas dans la même classe d'équivalence que $\mathbb{N}$. Pour cela on va exhiber une injection de $2^{\mathbb{N}}$, que l'on sait non dénombrable et non fini, dans $V(f(P^N))$.

Soit $\mathcal{G} : 2^{\mathbb{N}} \to V(f(P^N))$, $E \to \bigcup_{x \in E}\{(x,x)\} \bigcup_{x \in \mathbb{N} \setminus E}\{(x, x+1)\}$

- **Montrons que $\mathcal{G}$ est bien définie** sur le domaine que l'on lui a attribué.

  Soit $E \subseteq \mathbb{N}$, donc $E \in 2^{\mathbb{N}}$. Il faut montrer que $\mathcal{G}(E)$ est une antichaîne maximale pour l'inclusion de P^N.

  Supposons que $\mathcal{G}(E)$ n'est pas une antichaîne, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathcal{G}(E)$ distincts, avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, tels que $\alpha \sim_{P^N} \beta$. On a donc $\alpha_1 = \beta_1$ et soit $\alpha_2 <_{\mathbb{N}} \beta_2$, soit $\alpha_2 >_{\mathbb{N}} \beta_2$. Or, par définition de $\mathcal{G}$, si $\alpha_1 = \beta_1$ alors $\alpha = \beta$. Contradiction avec la condition sur α et β distincts.

  Supposons que $\mathcal{G}(E)$ n'est pas une antichaîne maximale pour l'inclusion, alors $\exists\ \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in V(P^N) \setminus \mathcal{G}(E)$ tel que $\mathcal{G}(E) \cup \{\gamma\}$ soit une antichaîne de P^N. Deux possibilités :

  * Soit $\gamma_1 \in E$, alors $(\gamma_1, \gamma_1) \in \mathcal{G}(E)$ implique $\gamma \sim_{P^N} (\gamma_1, \gamma_1)$, ce qui est une contradiction avec le fait que $\mathcal{G}(E) \cup \{\gamma\}$ soit une antichaîne de P^N.
  * Soit $\gamma_1 \in \mathbb{N} \setminus E$, alors $(\gamma_1, \gamma_1 + 1) \in \mathcal{G}(E)$ implique que $\gamma \sim_{P^N} (\gamma_1, \gamma_1 + 1)$, ce qui est une contradiction avec le fait que $\mathcal{G}(E) \cup \{\gamma\}$ soit une antichaîne de P^N.

  Donc $\mathcal{G}$ est bien définie.

- **Montrons que $\mathcal{G}$ est injective**.

  Soit $X, Y \in 2^{\mathbb{N}}$ tels que $\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(Y)$. Montrons que $X = Y$:

Supposons que $X \neq Y$, alors soit $X \backslash Y \neq \emptyset$, soit $Y \backslash X \neq \emptyset$. Sans perte de généralité on suppose $X \backslash Y \neq \emptyset$. Soit $x \in X \backslash Y$, $(x, x) \in \mathcal{G}(X)$ implique que $(x, x) \in \mathcal{G}(Y)$ (on a supposé $\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(Y)$), et donc $x \in Y$, contradiction.

Donc $\mathcal{G}$ est injective.

On a pu effectuer une injection d'un domaine infini et pas dénombrable ($2^{\mathbb{N}}$) dans $V(f(P^N))$, ensemble des antichaînes maximales pour l'inclusion de P^N, donc cet ensemble est infini et indénombrable.

3 Programmation/Algorithmique

Dans cette partie, il s'agit à terme d'observer de façon pratique le résultat que le théorème nous permet d'obtenir. Ainsi, nous espérons pouvoir dénoter dans le déroulement du processus de calcul les propriétés structurelles des ordres intermédiaires à l'ordre total final. A partir d'un ordre quelconque, il doit être théoriquement possible de calculer le nombre d'itérations nécessaires afin d'obtenir une chaîne, et à chaque itération de regarder l'ordre obtenu. Comme nous l'avons vu dans une partie précédente, si l'ordre est trop grand, le nombre d'antichaînes maximales pour l'inclusion qui est généré est de l'ordre de l'exponentiel, il ne sera donc pas possible en pratique de calculer ce nombre pour des ordres trop grands.

La programmation s'effectuera dans le langage ISETL. Nous aurons besoin d'implémenter des fonctions intermédiaire (sous-section 1), le principal problème que nous devons traiter est le calcul de l'ensemble des antichaînes maximales pour l'inclusion d'un ordre (sous-section 2), et nous intégrerons ce calcul dans l'algorithme global proposé dans la CRAS, mais ce dernier point n'a pas été achevé.

3.1 Représentation del'ordre en ISETL

Un couple composé d'un ensemble de sommets et d'un ensemble d'arêtes Deux exemples, le premier est la chaîne à 5 éléments :

```
VC5 := {1..5}; EC5 := {[x,y] : x,y in VC5 : x<y}; PC5 := [VC5,EC5];


VGG := {1..7}; EGG := {[x,y] : x,y in VGG : x < y - 1}; PGG :=
[VGG,EGG];
```

3.2 Les fonctions de bases

Prédécesseur d'un point

```
predecesseur := func(P,x);
    local V,E;
    [V,E] := P;
    return {y : y in V : [y,x] in E};
end;
```

Successeur d'un point

```
successeur := func(P,x);
    local V,E;
    [V,E] := P;
    return {y : y in V : [x,y] in E};
end;
```

Prédécesseur d'un ensemble

```
predecesseurE := func(P,Ens);
    local Preds;
    Preds := {y : x in Ens, y in predecesseur(P,x)};
    return Preds - Ens;
end;
```

Sucesseur d'un ensemble

```
successeurE := func(P,Ens);
    local Succs;
    Succs := {y : x in Ens, y in successeur(P,x)};
    return Succs - Ens;
end;
```

Minimum d'un ordre

```
minimumO := func(P);
    local V,E;
    [V,E] := P;
    return {x : x in V : #predecesseur(P,x) = 0};
end;
```

Maximum d'un ordre

```
maximumO := func(P);
    local V,E;
    [V,E] := P;
    return {x : x in V : #successeur(P,x) = 0};
end;
```

Sous ordre

```
sousOrdre := func(P,SE);
    local V,E;
    [V,E] := P;
    return [SE * V, E * {[x,y] : x,y in SE}];
end;
```

Hauteur d'un point

```
hauteurAux := func(P,val);
    local V,E;
    [V,E] := P;
    if #E = 0  then return val;
    else
    V := V - minimumO(P);
    P := sousOrdre(P,V);
    return hauteurAux(P, val + 1);
    end;
end;
```

```
hauteur := func(P);
    return hauteurAux(P,1);
end;
```

Test pour savoir si un ordre est une chaîne

```
ReducTrans := func(P);
    local V,E,newE;
    [V,E] := P;
    newE := {[a,b] : a in V, b in V : [a,b] in E and
                    (not exists z in V : [a,z] in E and
                            [z,b] in E)};
    return [V,newE];
end;
```

3.3 Les fonctions annexes

La fermeture transitive Cette fonction permet de ne pas avoir à entrer le graphe sous la forme de son graphe de comparabilité mais directement le graphe orienté de couverture.

```
fermTrans := func(P);
    local V,E,newE,Etmp;
    [V,E] := P;
    newE := E;

    Etmp := {[a,b] : a in V, b in V : [a,b] notin newE and
                exists z in V : [a,z] in newE and [z,b] in newE};


    while (#Etmp /= 0) do
    newE := newE + Etmp;
    Etmp := {[a,b] : a in V, b in V : [a,b] notin newE and
        exists z in V : [a,z] in newE and [z,b] in newE};

    end;
    return [V,newE];
end;
```

La reduction transitive Cette fonction permet d'afficher le graphe orienté de couverture et non pas le graphe de comparabilité. Ceci dans un soucis de lisibilité du résultat textuel.

```
ReducTrans := func(P);
    local V,E,newE;
    [V,E] := P;
    newE := {[a,b] : a in V, b in V : [a,b] in E and
                    (not exists z in V : [a,z] in E and
                            [z,b] in E)};
    return [V,newE];
end;
```

3.4 Le calcul des antichaînes maximales pour l'inclusion

Implémentation

```
EnsAntMax := func(Px);
    local Vx,V,E,x,P,EnsAnt,EnsAntPx,A,Ax;

    [Vx,E] := Px;
    if #E = 0 then return {Vx};
    else
    x:=arb (maximumO(Px));
    V := Vx - {x};
    P := sousOrdre(Px, V);
    EnsAnt := EnsAntMax(P);
    EnsAntPx := {};

    for A in EnsAnt do

    Ax := A * predecesseur(Px,x);
    if #Ax = 0
    then
    EnsAntPx := EnsAntPx + {A + {x}};
    else
    EnsAntPx := EnsAntPx + {A};
    if successeurE(P,Ax) subset successeurE(P,(A-Ax))
    then
    EnsAntPx := EnsAntPx + {(A + {x})-Ax};
    end;
    end;
    end for;
    return EnsAntPx;
    end;
end;
```

Après avoir calculé l'ensemble des antichaînes maximales pour l'inclusion de l'ordre P, il faut construire l'ordre P_1 à partir de ces sommets et de la relation $\mathcal{F}$ de la C.R.A.S.

```
KR := func(P);
    local vp,ep,vp1,ep1;
    [vp,ep] := P;

    vp1:=EnsAntMax(P);
    ep1 := { [a,b] : a in vp1, b in vp1 : forall x in a  | (exists y in b | [x,y] in ep)};
    return [vp1,ep1];
end;
```

3.5 L'algorithme global : calcul de la borne

```
Borne := func(P);
    local b;

    b := 0;
```

```
    while (not(estUneChaine(P))) do
    b := b + 1;
    P := KR(P);
    end;
    print ReducTrans(P);
    return b;
end;
```