Module 3106: Transmissions large-bande

2018-2019

Plan

1. Séance 1: Notions de traitement du signal
2. Séance 2: Canaux multi-trajets et sélectivité en fréquence
3. Séance 3: Le filtrage numérique
4. Séance 4: Modulations numériques et multiplexage CDMA
5. Séances d'approfondissement: Modélisation probabiliste d'un canal

Signaux, canaux, capteurs et codage

- **Signal:** “Information” transmise d’un ou plusieurs émetteurs vers un ou plusieurs récepteurs.
- **Canal:** Milieu physique permettant le transport du signal. Celui-ci a des défauts: temps de parcours, perte du signal, ajout de bruit, distorsion et saturation du signal.
- **Codage:** Transformation du signal en un signal mieux adapté au canal.
- **Capteur:** Organe du récepteur mesurant une propriété du signal.

Modélisation mathématique d'un signal

Signal est une fonction:

$$S : D \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C},$$

où:

- D est le support (ou ensemble de définition) du signal.
- $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est l'ensemble des valeurs prises par le signal.

- **Signal temporel:** Lorsque D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Exemple: signal sonore, onde électromagnétique. Dans ce cas $S(t)$ est la valeur du signal à l'instant $t \in D$.
- **Images 2D - Images 3D:** Lorsque D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Dans le cas 2D: $S(x, y)$ est la valeur (couleur ou niveau de gris) du pixel de coordonnées (x, y).

Remarque: Les signaux traités seront uniquement temporels.

Exemple de signaux réels

Signal réel: Lorsque $S(t) \in \mathbb{R}$.

- **Signal sonore monophonique en un point M de l'espace:** $S(t)$ représente la concentration de molécule d'air au point M et à l'instant t.

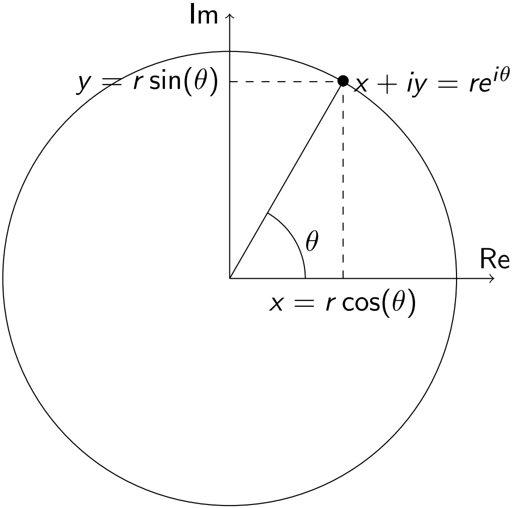
- **Signal électrique:** $S(t)$ représente l'intensité électrique à l'instant t.

Exemple de signaux complexes

Signal complexe: Lorsque $S(t) \in \mathbb{C}$.
Rappels sur l'ensemble $\mathbb{C}$:

- **Nombre complexe:** De la forme $z = x + iy$ avec $i^2 = -1$. x est la partie réelle et y est la partie imaginaire.
- **Plan complexe:** Un nombre complexe est représenté par un point du plan où x est l'abscisse et y est l'ordonnée.
- **Représentation d'Euler:** $z = re^{i\theta}$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (noté également $|z|$) est le module (cad: distance du point z à l'origine O) et θ est l'argument (cad: angle entre les demi-droites Oz et l'axe des abscisses.)

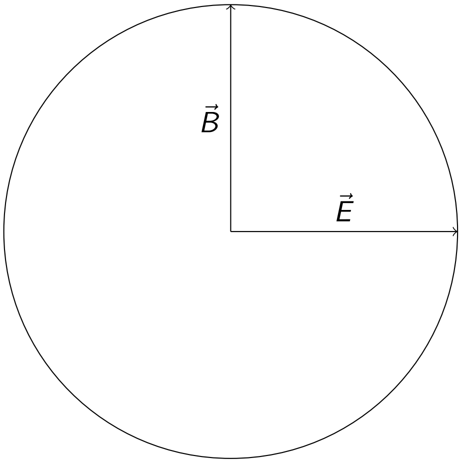
Représentation du plan complexe (cercle de rayon r)



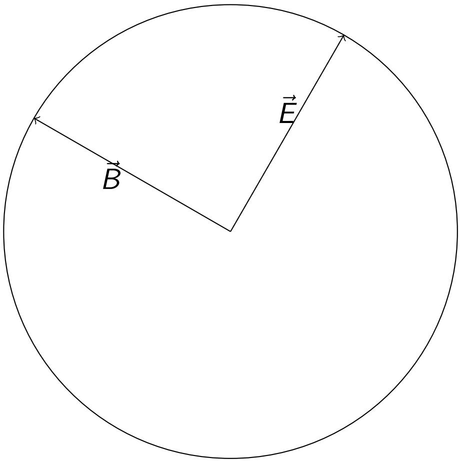
Exemple de signaux complexes (suite)

- **Onde sonore stéréophonique:** Partie réelle: oreille gauche, Partie imaginaire: oreille droite.
- **Valeur du champ électrique d'une onde électromagnétique plane circulaire:** Le champ électrique est un vecteur du plan du capteur.
- **Tout signal réel:** Un nombre réel est un nombre complexe particulier (avec partie imaginaire égale à 0).

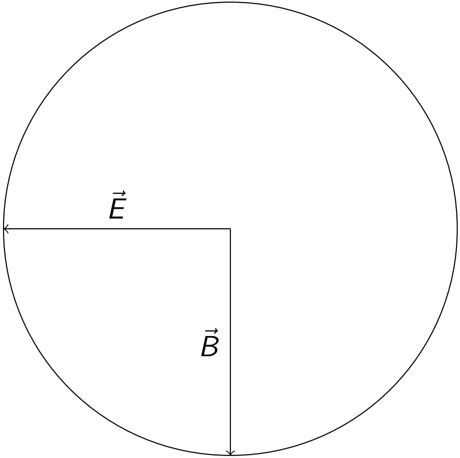
Evolution d'une onde plane circulaire sur le plan complexe



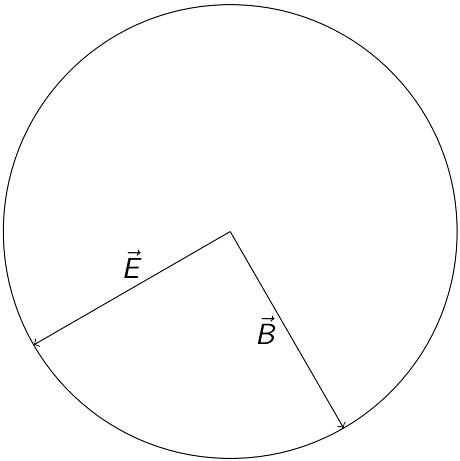
Evolution d'une onde plane circulaire sur le plan complexe



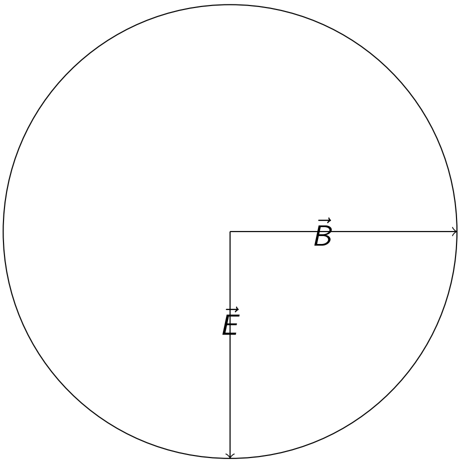
Evolution d'une onde plane circulaire sur le plan complexe



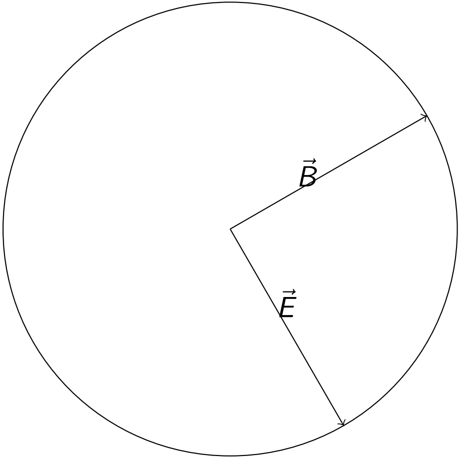
Evolution d'une onde plane circulaire sur le plan complexe



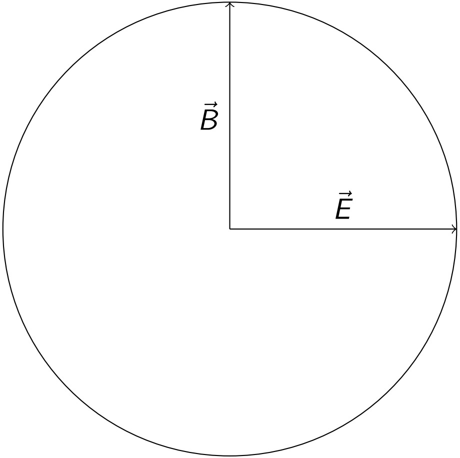
Evolution d'une onde plane circulaire sur le plan complexe



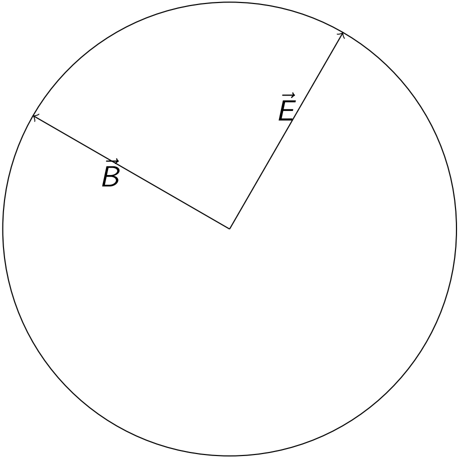
Evolution d'une onde plane circulaire sur le plan complexe



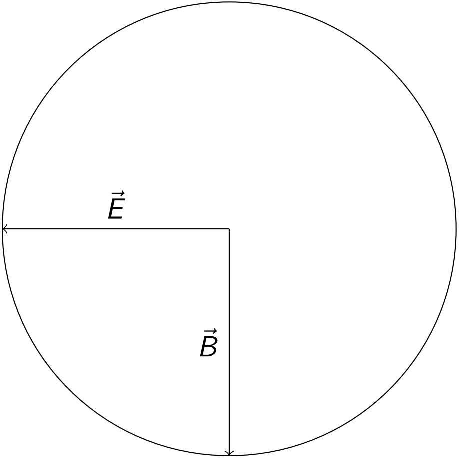
Evolution d'une onde plane circulaire sur le plan complexe



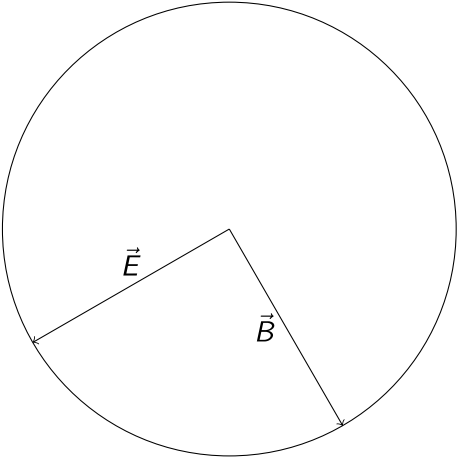
Evolution d'une onde plane circulaire sur le plan complexe



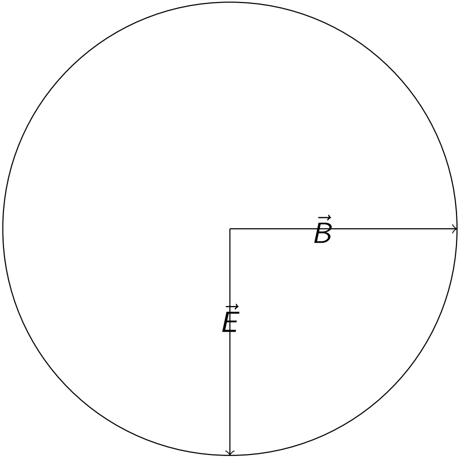
Evolution d'une onde plane circulaire sur le plan complexe



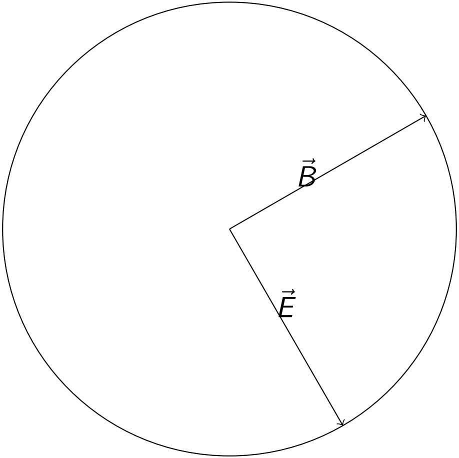
Evolution d'une onde plane circulaire sur le plan complexe



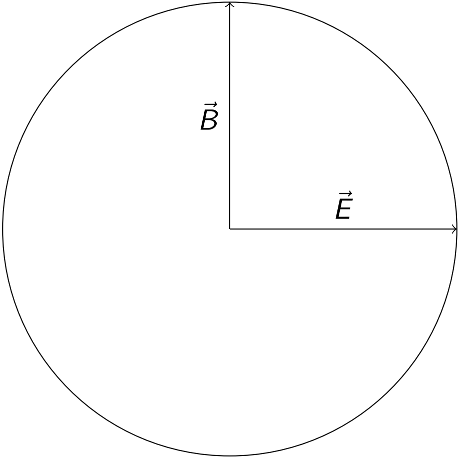
Evolution d'une onde plane circulaire sur le plan complexe



Evolution d'une onde plane circulaire sur le plan complexe



Evolution d'une onde plane circulaire sur le plan complexe



Modélisation mathématique des canaux

- **Canal simple sans bruit à une ligne de retard:** On le note $C_{\tau,H}$ où τ est le temps de parcours du canal et H le gain complexe.
  Si S est le signal d'entrée, le signal de sortie noté $C_{\tau,H} * S$ vérifie $C_{\tau,H} * S(t) = HS(t-\tau)$. C'est le signal d'entrée retardé de τ et amplifié de H.

- **Canal multitrajet sans bruit (à K lignes de retard):** Il est défini par $C = \sum_{k=1}^{K} C_{\tau_k,H_k}$ où C_{τ_k,H_k} est un canal simple à une ligne retard dont le temps de parcours est τ_k et le gain H_k.

- **Canal à bruit additif:** Soit C canal sans bruit, on modélise le canal bruité correspondant par le signal de sortie $C * S + N$, où N est le signal inutile correspondant au bruit.

Transformée de Fourier et représentation fréquentielle d'un signal

Signal complexe périodique de référence: La fonction exponentielle complexe: $S_{f_0}(t) = \exp(2i\pi f_0 t)$.
$S(t)$ est un point parcourant le cercle de rayon 1 à vitesse constante. f_0 est la fréquence, $T = \frac{1}{f_0}$ est la période et $\omega = 2\pi f_0$ est la pulsation (vitesse angulaire, radians par seconde).
But de la transformée de Fourier: Décomposer un signal complexe (ou réel) en "somme" de fonctions exponentielles complexes.

- **Fréquence fondamentale et fréquences harmoniques:** Lorsque $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n S_{f_n}$ avec $f_n = nf_1$. f_1 est appelée fréquence fondamentale et les f_n sont les fréquences harmoniques.
- **Fréquences partielles:** Lorsque $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n S_{f_n}$ mais que les f_n n'ont aucune relation de proportionnalité, les fréquences sont dites partielles.

Calcul de la transformée de Fourier (*)

- **Signaux intégrables:** Signaux vérifiant:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S(t)| dt < +\infty.$$

La transformée de Fourier est donnée par:

$$\hat{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \exp\left(-2i\pi f t\right) dt.$$

Si de plus $\hat{S}$ est également intégrable:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(f) \exp\left(2i\pi f t\right) dt.$$

Calcul de la transformée de Fourier (suite) (*)

- **Signaux périodiques:** Un signal est périodique de période T (donc de fréquence $\frac{1}{T}$) s'il vérifie $S(t+T) = S(t)$ pour tout t. Sa transformée de Fourier est échantillonnée et vaut:

$$\hat{S} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta_{\frac{n}{T}},$$

c'est à dire $\hat{S}\left(\frac{n}{T}\right) = c_n$ et 0 ailleurs. c_n est donné par:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \exp\left(-2i\pi\frac{n}{T}t\right) dt.$$

De plus, on a:

$$S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp\left(2i\pi\frac{n}{T}t\right).$$

Remarque: La fréquence fondamentale est $f_1 = \frac{1}{T}$, c'est la fréquence du signal.

Calcul de la transformée de Fourier (suite) (*)

- **Signaux échantillonnés (à pas constant):** Signal de la forme:

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n \delta_{n\tau},$$

cad. $S(n\tau) = S_n$ et 0 ailleurs (signal nul sauf tous les instants τ).
Dans ce cas, la transformée de Fourier est périodique de période $\frac{1}{\tau}$ et donnée par:

$$\hat{S}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n \exp\left(-2i\pi n\tau f\right).$$

Calcul de la transformée de Fourier (suite) (*)

- **Signaux réels périodiques:** Dans ce cas, $S(t)$ s'écrit:

$$S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right),$$

où $a_n = \mathrm{Re}(c_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(c_n)$.

Attention !!!!!!!!: On calcule c_n avant de calculer les a_n et b_n.

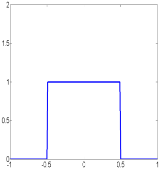
Injectivité de la transformée de Fourier

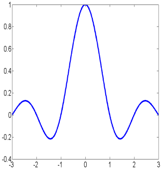
Si $\hat{S}_1 = \hat{S}_2$, alors $S_1 = S_2$.

En d'autres mots: Deux signaux différents ne peuvent pas avoir la même transformée de Fourier.

Exemples de transformées de Fourier de signaux intégrables

- **Porte rectangulaire de longueur T:** $S(t) = 1$ pour $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ et 0 ailleurs.
  Sa transformée de Fourier est $\hat{S}(f) = \frac{\sin(\pi T f)}{\pi f}$ (non intégrable).

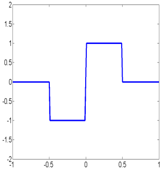


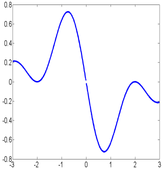


Signal Transformée de Fourier.

Exemples de transformées de Fourier de signaux intégrables (suite)

- **Porte rectangulaire impaire de longueur T:** $S(t) = -1$ pour $t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right[$, $S(t) = 1$ pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ et 0 ailleurs.
  Sa transformée de Fourier est $\hat{S}(f) = \frac{-2i}{\pi f} \sin^2\left(\pi \frac{T}{2} f\right)$ (non intégrable).



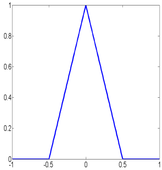


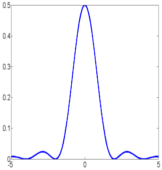
Signal Transformée de Fourier (partie imaginaire).

Exemples de transformées de Fourier de signaux intégrables (suite)

- **Porte triangulaire de longueur T:** $S(t) = \frac{2}{T}t + 1$ pour $t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right[$, $S(t) = 1 - \frac{2}{T}t$ pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ et 0 ailleurs.

  Sa transformée de Fourier est $\frac{2}{T(\pi f)^2}\sin^2\left(\pi \frac{T}{2} f\right)$.





Signal Transformée de Fourier.

Astuces de calcul

Calcul de transformée de Fourier de fonctions à partir de transformées de Fourier connues:

- **Tr. de Fourier d'une translatée:** Si $S_{\tau_0} = S(t - \tau_0)$, alors $\hat{S}_{\tau_0}(f) = \exp(-2i\pi\tau_0 f)\hat{S}(f)$.
- **Tr. de Fourier d'une modulation AM:** Si $S_{f_0}(t) = \exp(2i\pi f_0 t)S(t)$, alors $\hat{S}_{f_0}(f) = \hat{S}(f - f_0)$.
- **Tr. de Fourier d'une dérivée:** On a $\hat{S'}(f) = 2i\pi f\hat{S}(f)$. (Rq: dériver un signal agit comme un filtre passe-haut).

Exemples de transformée de Fourier de signaux périodiques

- **Signaux rectangulaire périodique de période T:** Les coefficients de Fourier complexes sont $c_{2k} = 0$ et $c_{2k+1} = -\frac{2i}{\pi(2k+1)}$. Ainsi:

$$S(t) = -\frac{2i}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2k+1} \exp\left(2i\pi \left(\frac{2k+1}{T}\right) t\right).$$

En utilisant $a_n = \mathrm{Re}(c_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(c_n)$, on a:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2k+1} \sin\left(2\pi \left(\frac{2k+1}{T}\right) t\right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left(2\pi \left(\frac{2k+1}{T}\right) t\right) \end{aligned}$$

- **Signaux triangulaire périodique de période T:** Les coefficients de Fourier complexes sont $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_{2k} = 0$ pour $k \neq 0$ et $c_{2k+1} = -\frac{2}{\pi^2(2k+1)^2}$. Ainsi:

$$S(t) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} \exp\left(2i\pi\left(\frac{2k+1}{T}\right)t\right).$$

En utilisant $a_n = \mathrm{Re}(c_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(c_n)$, on a:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(2\pi\left(\frac{2k+1}{T}\right)t\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(2\pi\left(\frac{2k+1}{T}\right)t\right) \end{aligned}$$

Interprétation de la transformée de Fourier

- **Module:** Le module $\left|\hat{S}(f)\right|$ (res. $|c_n|$) renseigne sur la quantité de fréquence f (resp. $\frac{n}{T}$) dans le signal.
- **Argument:** L'argument de $\hat{S}(f)$ (resp. de c_n) renseigne sur la localisation temporelle de la fréquence f (resp. $\frac{n}{T}$) mais est difficilement interprétable sauf dans des cas simples.

Remarque: Comme seul le module est facilement interprétable, la transformée de Fourier trouve son utilité uniquement pour les signaux stationnaires.

Energie et transformée de Fourier: la formule de Parseval

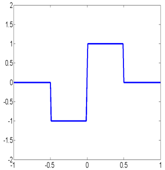
- **Pour les signaux intégrables:**

$$\text{Energie} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|S(t)|^2}_{\text{Puissance en temps}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|\hat{S}(f)|^2}_{\text{Puissance en fréquence}} df.$$

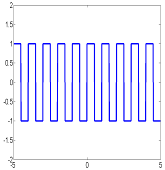
- **Pour les signaux périodiques:**

$$\text{Energie moyenne (sur une période)} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |S(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

Transformée de Fourier et signaux à support compact

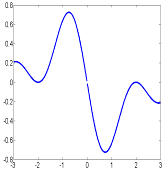


$\Rightarrow$

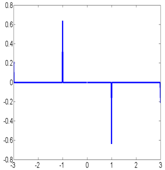


Support compact

Prolongement périodique



$\Rightarrow$

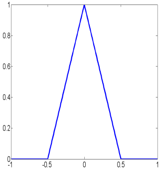


Tr. de Fourier

Tr. de Fourier échantillonnée

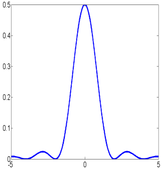
Conclusion: On peut retrouver intégralement un signal à support compact en échantillonnant la tr. de Fourier.

Transformée de Fourier et signaux échantillonnés

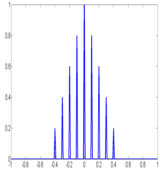


Signal d'origine

$\Rightarrow$

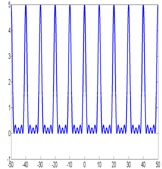


Sa tr. de Fourier



Signal échantillonné

$\Rightarrow$



Sa tr. de Fourier

Conclusion: Le signal d'origine peut être retrouvé intégralement à partir du signal échantillonné après filtrage.

Théorème de Shannon-Nyquist

Question: Quel est le pas optimal d'échantillonnage?

- **Ne doit pas être trop petit:** car sinon il y a saturation du canal de transmission qui possède un débit maximal et une bande passante finie (les deux sont liés, pourquoi?)
- **Ne doit pas être trop grand:** car sinon, les motifs dans la transformée de Fourier périodique vont se chevaucher et le signal d'origine sera corrompu après filtrage.
- **Théorème de Shannon-Nyquist:** Si le canal de transmission (ou le capteur) possède une bande passante de largeur ΔB, le pas d'échantillonnage devra être de $\dfrac{1}{2\Delta B}$. Soit une fréquence d'échantillonnage de $2\Delta B$.

Exemples de fréquence d'échantillonnage

- **Scilab (par défaut):** 22050 Hz.
- **Format .wav et CD audio (réglage de la plupart des cartes sons par défaut):** 44100 Hz.
- **Format .wav haute-fidélité:** 88200 Hz.
- **Réseau téléphonique RTC:** 8000 Hz.

Fonctionnement carte son

- **Analogic-digital-converter ADC:** Du micro vers la carte:
  1. Echantillonnage: A la fréquence de Nyquist, donne des nombres réels compris entre $-M$ et M où M est un seuil (appelé 0db). Tout nombre réel (intensité trop forte) plus grand que M ou plus petit que $-M$ est tronqué en M ou $-M$ (distortion).
  2. Quantification et Codage: Les nombres réels précédents sont codés en octets (2 octets pour le format .wav, 1 octet pour le RTC). Un code cyclique redondant est ajouté pour détecter les erreurs de transmission.
- **Digital-analogic-converter DAC:** De la carte vers le HP:
  1. Décodage et conversion analogique: On utilise le CRC pour détecter les erreurs qui sont corrigées par l'algorithme de Viterbi. On retraduit les valeurs binaires en nombre réel. On obtient le signal échantillonné.
  2. Filtrage: On filtre le signal échantillonné pour obtenir un signal continu dans la bande utile $[f_0, f_0 + \Delta B]$.

Exercice: Que se passe-t-il si on envoie un signal sinusoïdal dans la carte son de fréquence plus grande que $f_0 + \Delta B$ où $2\Delta B$ est la fréquence d'échantillonnage de la carte son. Pourquoi?

Repliement de spectre (aliasing)

- **Conséquence de l'échantillonnage:** Si $f_s = 2\Delta B$ est la fréquence d'échantillonnage et soit $f \in [f_0, f_0 + \Delta B]$. Un signal sinusoïdal de fréquence $f_s - f$ a le même échantillonnage que le signal sinusoïdal de fréquence f. Les signaux de fréquence $f + kf_s$, où k est un entier ont également même échantillonnage. Conséquence: Correspond au même son après conversion analogique.
- **Cas d'un signal périodique:** Un signal périodique est somme d'une infinité de sinusoïde. Les fréquences harmoniques dépassant la bande passante ΔB seront alors amenées dans la bande passante. Une distortion se crée: c'est le repliement de spectre.
- **Synthèse anti-aliasing d'un signal périodique:** Avant échantillonnage, on ajoute seulement les sinusoïdes des fréquences harmoniques figurant dans la bande passante du DAC.

Transformée de Fourier discrète

Motivations:

- **Pour un signal à support compact:** Il suffit d'échantillonner sa transformée de Fourier pour obtenir le signal.
- **Pour un signal échantillonné:** Il suffit de restreindre sa transformée de Fourier périodique pour retrouver le signal.
- **Pour un signal échantillonné à support compact (et donc un nombre fini de valeurs non nulles):** Il suffit de considérer un nombre fini de valeurs de sa transformée de Fourier pour retrouver le signal.

Transformée de Fourier discrète (suite)

- **Tr. de Fourier discrète** Pour un signal échantillonné à support compact $S_0, S_1, \ldots, S_{N-1}$, où $S_n = S(n\tau)$, celle-ci est donnée par:

$$\hat{S}_k \stackrel{\text{def}}{=} \hat{S}\left(\frac{k}{N\tau}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n \exp\left(-2i\pi\frac{nk}{N}\right),$$

  pour k entier allant de 0 à $N-1$.

- **Tr. de Fourier discrète inverse** A partir des $\hat{S}_k$, on retrouve le signal par:

$$S_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{S}_k \exp\left(2i\pi\frac{nk}{N}\right).$$

Transformée de Fourier d'un canal

- **Canal simple:** La transformée de Fourier de $C_{\tau,H}$ est $\hat{C}_{\tau,H}(f) = H \exp(-2i\pi\tau f)$.
- **Canal multitrajet sans bruit:** La transformée de Fourier de $C = \sum_{k=1}^{K} C_{\tau_k,H_k}$ est $\hat{C}(f) = \sum_{k=1}^{K} \hat{C}_{\tau_k,H_k}$.
- **Interprétation de la transformée de Fourier d'un canal:** La transformée de Fourier du signal de sortie est $\hat{C} \times \hat{S}$. Un canal agit comme un filtre.

Canaux multi-trajets

- **Canal multitrajet sans bruit (à K lignes de retard):** Il est défini par $C = \sum_{k=1}^{K} C_{\tau_k}$ où C_{τ_k} est un canal simple à une ligne retard dont le temps de parcours est τ_k.
  Le signal d'entrée parcourt K canaux en parallèle ayant différents temps de parcours.
- **Canal sélectif en fréquence:** Un canal C est sélectif en fréquence si le module de sa transformée de Fourier $\left|\hat{C}(f)\right|$ n'est pas constant.
  Ainsi, un canal sélectif en fréquence pondère les fréquences différemment les unes des autres.

Sélectivité en fréquence d'un canal à deux trajets

On montre: pour le canal à deux trajets $C = C_{\tau_1} + C_{\tau_2}$, on a:

$$\left|\hat{C}(f)\right|^2 = 2 + 2\cos\left(2\pi(\tau_2 - \tau_1)f\right).$$

Conclusion: Un canal à deux trajets est sélectif en fréquence.

Remarque: En fait, tout canal multi-trajet est sélectif en fréquence.

Là où la sélectivité en fréquence peut être utile: synthèse sonore par guide d'onde

Modèle d'instrument de musique par guide d'onde:

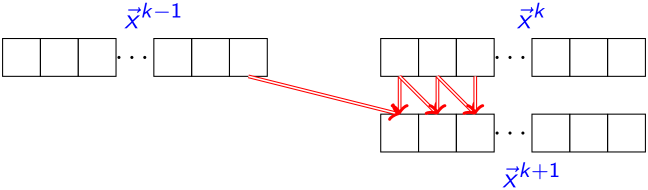
1. **Signal d'excitation:** Signal à l'entrée de l'instrument et qui va le traverser jusqu'à sa sortie. Exemples: Souffle dans une flûte, pincement initial de la corde d'une guitare, frottement de l'archet pour un violon, etc...
2. **Instrument:** Filtre (cad. sélectionne les fréquences) le signal d'excitation comme un canal multi-trajet jusqu'à sa sortie.
3. **Signal de sortie:** Une partie du signal de sortie est ré-injectée dans l'instrument en remplacement du signal d'excitation.
4. **Extinction de l'instrument:** En absence d'excitation extérieure. A force de filtrages consécutifs du signal ré-injecté, il n'y a plus de signal à la sortie.

Là où la sélectivité en fréquence peut être utile: synthèse sonore par guide d'onde (suite)

Exemple de l'algorithme de Karplus-Strong: On veut simuler le son provenant d'une corde de harpe de fréquence modale $f_0 = \frac{1}{T}$:

1. **Signal d'excitation:** On simule un bruit blanc (nombres aléatoires) pendant la durée T. Si la fréquence d'échantillonnage est f_S. On simule un vecteur de $N = f_S T$ échantillons de nombres aléatoires soit $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_N^{(0)})$.
2. **La corde:** A partir de $\vec{x}^{(k)}$, on crée le vecteur $\vec{x}^{(k+1)}$ de longueur N par $x_n^{(k+1)} = \frac{x_n^{(k)} + x_{n-1}^{(k)}}{2}$. C'est comme si on faisait passer le signal dans deux canaux parallèles dont un retarde le signal d'un échantillon.
3. **Le son en sortie:** Concaténation des vecteurs $\vec{x}^{(k)}$ à partir de $k \geq 1$. $\vec{x}^{(k)}$ correspond au son écouté à la k-ième période.

Algorithme de Karplus-Strong



Principe: Un échantillon est obtenu par moyenne des deux échantillons successifs de la période précédente.

Là où on ne voudrait pas de sélectivité en fréquence

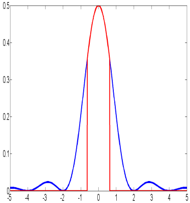
- **Courants porteurs en ligne:** Le réseau électrique n'est pas conçu à la base pour supporter des hautes fréquences. Il va se comporter comme un intrument modélisé par guide d'onde.
- **Wifi:** Multi-trajet dû aux réflexions sur le mobilier et divers objets de la pièce.
- **Réseau cellulaire:** Multi-trajet dû aux réflexions.

Remarque: La sélectivité en fréquence peut avoir des conséquences désastreuses (large bande) ou aucune conséquence selon la nature du signal transporté (bande étroite).

Bande de fréquences d'un signal, bande de cohérence et signaux large-bande

- **Bande de fréquences (resp. cohérence) à 3dB d'un signal (resp. canal):** Autour d'une fréquence modale f_m (cad. telle que $\left|\hat{S}(f_m)\right|$ soit un maximum local est l'ensemble des fréquences f vérifiant:

$$0 \leq 20\log_{10}\left(\frac{\left|\hat{S}(f_m)\right|}{\left|\hat{S}(f)\right|}\right) \leq 3$$



Bande de fréquences d'un signal, bande de cohérence et signaux large-bande (suite)

- **Signal large-bande (par rapport à un canal):** Un signal (à une seule fréquence modale) est considéré large-bande par rapport à un canal si sa bande de fréquence est plus large que la bande de cohérence d'un canal.
- **Signal bande étroite (par rapport à un canal):** S'il n'est pas large-bande.
- **Sélectivité en fréquence:** Un signal large-bande subit davantage la sélectivité en fréquence qu'un signal bande étroite.
- **Pourquoi ne pas alors transmettre des signaux bande étroite?:** Car les signaux bande étroite sont plus facilement corruptibles par du bruit et ne permettent pas de transporter beaucoup d'information (pas assez de canaux virtuels).

Rappels sur les filtres analogiques

- **Signal d'entrée:** $t \to X(t)$ de transformée de Fourier $f \to \hat{X}(f)$.
- **Signal de sortie:** $t \to Y(t)$ de transformée de Fourier $f \to \hat{Y}(f)$.
- **Filtre analogique:** Un filtre analogique est représenté par sa fonction de transfert dans le domaine fréquentiel: $\hat{Y}(f) = H(f) \times \hat{X}(f)$.
- **Filtre analogique linéaire:**

$$H(f) = \frac{A(2i\pi f)}{B(2i\pi f)} = \frac{A(i\omega)}{B(i\omega)},$$

  où A et B sont deux polynômes à coefficients réels.
- **Filtre analogique linéaire et équation différentielle linéaire:** Si $A = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \ldots + a_0$ et
  $B = b_m Z^m + b_{m-1} Z^{n-1} + \ldots + b_0$, alors:

$$b_m \frac{d^m Y}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} Y}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 Y = a_n \frac{d^n X}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} X}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 X \tag{1}$$

Principe général du filtrage numérique

- **Signaux échantillonnés:** $X = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n \delta_{n\tau}$ et $Y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Y_n \delta_{n\tau}$.
- **Filtre échantillonné:** L'équation différentielle (1) devra être discrétisée en remplaçant les dérivées par des approximations discrètes.
  Exemple: $\frac{dY}{dt}(n\tau) \simeq \frac{Y_n - Y_{n-1}}{\tau}$ (approximation de la dérivée par différences finies).

  En exo: Approximer $\frac{d^2Y}{dt^2}(n\tau)$ par différences finies.
- **Filtre causal:** Après échantillonnage de l'équation différentielle, Y et X sont liés par une relation de la forme:

$$Y_n + \sum_{k=0}^{n-1} q_k Y_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} p_k X_{n-k}$$

  Y_n ne dépend que des valeurs passées des Y_k et des X_k: un tel filtre est dit causal.

Transformée en z

- **Signal échantillonné:** $X = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n \delta_{n\tau}$.
- **Sa transformée de Fourier:** $\hat{X}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n \exp(-2i\pi n\tau f)$. Celle-ci est donnée par $f_X(e^{-2i\pi\tau f})$, où:

$$f_X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n z^n$$

La fonction f_X (de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) est appelée transformée en z du signal X.

Filtre linéaire causal

- **Transformée en z:** La transformée en z d'un filtre linéaire causal est de la forme:
$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$
où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels.
- **Filtrage numérique dans le domaine temporel:** Si $P(z) = p_m z^m + p_{m-1} z^{m-1} + \ldots + p_0$ et $Q(z) = q_r z^r + q_{r-1} z^{r-1} + \ldots + 1$, alors:
$$Y_n + q_1 Y_{n-1} + \ldots + q_r Y_{n-r} = p_0 X_n + p_1 X_{n-1} + \ldots + p_m X_{n-m}$$
- **Filtrage numérique dans le domaine fréquentiel:** Les transformées de Fourier de X et Y sont liées par:
$$\hat{Y}(f) = G(e^{-2i\pi\tau f})\hat{X}(f)$$

Obtention d'un filtre numérique à partir d'un filtre analogique

1. **Echantillonnage du filtre dérivatif:** On échantillonne l'équation différentielle $Y = X'$ afin d'obtenir la représentation temporelle du filtrage numérique associé à la dérivée.
2. **Transformée en z du filtre dérivatif:** On déduit la transformée en z, notée $\frac{C(z)}{D(z)}$ du filtre numérique dérivatif.
3. **Dérivée dans le domaine fréquentiel:** Comme dériver un signal dans le domaine temporel revient à multiplier par $i\omega$ dans le domaine fréquentiel; on remplace dans $H(f) = \dfrac{A(i\omega)}{B(i\omega)}$, $i\omega$ par $\frac{C(z)}{D(z)}$ pour obtenir $G(z)$.
4. **Expression du filtre numérique dans le domaine temporel:** On en déduit l'expression de Y_n fonction des Y_k et des X_k passés à partir de l'expression $G(z)$.

Premier exemple: filtre passe-bas numérique obtenu par différences finies

1. **Echantillonnage du filtre dérivatif:** $Y_n = \dfrac{X_n - X_{n-1}}{\tau}$.
2. **Transformée en z du filtre dérivatif:** C'est $\dfrac{1-z}{\tau}$.
3. **Transformée en z du filtre passe-bas:** On a $H(f) = \dfrac{1}{1 + i\frac{\omega}{\omega_0}}$, donc:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau\omega_0}(1-z)} \\
&= \tau\omega_0 \times \frac{1}{\tau\omega_0 + 1 - z} = \frac{\tau\omega_0}{1+\tau\omega_0} \times \frac{1}{1 - \frac{z}{1+\tau\omega_0}}
\end{aligned}
$$

4. **Expression du filtre numérique dans le domaine temporel:** $Y_n - \dfrac{1}{1+\tau\omega_0} Y_{n-1} = \dfrac{\tau\omega_0}{1+\tau\omega_0} X_n$.

Deuxième exemple: filtre passe-bas numérique obtenu par éléments finis

1. **Echantillonnage du filtre dérivatif:** De $Y = X'$, on en déduit:
$$\int_{(n-1)\tau}^{n\tau} Y(t)dt = \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} X'(t)dt = X_n - X_{n-1}$$
L'intégrale est approximée par méthode des trapèzes:
$$\int_{(n-1)\tau}^{n\tau} Y(t)dt \simeq \frac{\tau \times (Y_n + Y_{n-1})}{2}$$
Ainsi le filtre dérivatif numérique est:
$$Y_n + Y_{n-1} = \frac{2}{\tau} \times (X_n - X_{n-1})$$
2. **Transformée en z du filtre dérivatif:** C'est $\dfrac{2}{\tau} \times \dfrac{1-z}{1+z}$.
3. **Transformée en z du filtre passe-bas:** En exo.
4. **Expression du filtre numérique dans le domaine temporel:** En exo.

Modulations numériques

Problématique:

- **Nature du signal:** Une séquence de bits.
- **Problème:** Le support est une onde électromagnétique qui ne prend pas des valeurs 0 et 1.
- **Solution:** Codage des bits en nombre complexe (constellation)+Modulation.

Modulations numériques: choix de la constellation

- **Taille de la constellation:** La séquence de bits est découpée en morceaux de taille égale. On forme une suite de symbôles binaires.
- **Codage:** Chaque symbôle binaire est traduit en symbôle complexe (un nombre complexe).
- **Adaptation en débit AMC:** Le débit symbôle est constant (mesuré en bauds). Plus la taille de la constellation est grande et plus le débit binaire est grand. Plus le débit binaire est grand et plus le risque d'erreur est important.
  Canal fiable: On peut prendre une constellation de grande taille.
  Canal non fiable: Il faut prendre une constellation de petite taille.

Modulations numériques: exemples de constellation

- **ASK-2:** Symbôles de taille 1 bit. 0 codé comme 0 et 1 codé comme 1.
- **ASK-4:** Symbôles de taille 2 bits. 00 codé comme -1, 01 codé comme -3, 11 codé comme 3 et 10 codé comme 1.
- **BPSK:** Symbôles de taille 1 bits. 0 codé comme -1 et 1 codé comme 1.
- **QPSK:** Symbôles de taille 2 bits. 00 codé comme 1, 01 codé comme i, 11 codé comme -1 et 10 codé comme $-i$.
- **QAM-4:** Symbôles de taille 2 bits. 00 codé comme $1 + i$, 01 codé comme $-1 + i$, 11 codé comme $-1 - i$ et 10 codé comme $1 - i$.
- **QAM-16:** Symbôles de taille 4 bits. Similaire à QAM-4 avec 16 points dans le plan complexe.

Modulations numériques: exemple de codage en symbôles complexes avec QAM-4

1. **Séquence à coder:** 00010111001011.
2. **Découpage en symbôles binaires:** 00 01 01 11 00 10 et 11.
3. **Traduction en symbôles complexes:** $1+i$, $-1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1+i$, $1-i$ et $-1-i$.

Modulations numériques: étape de modulation

Principe: Soit τ la durée entre deux symbôles et $s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots$ la suite des symbôles complexes. s_k étant le symbôle émis à l'instant $k\tau$.
Le signal envoyé sur une porteuse de fréquence f_0 a pour expression:

$$S(t) = s_k \exp(2i\pi f_0 t),$$

lorsque $t \in [k\tau, (k+1)\tau[$.

CDMA: Code Division Multiple Access

- **But:** Permettre à différentes communications d'utiliser la même fréquence porteuse.
- **Principe de base:** Chaque communication utilise son propre code. Les codes doivent être orthogonaux (on précisera la notion plus tard).
- **Utilisation en téléphonie GSM:** L'antenne relais envoie à tous les usagers de la cellule la même onde électromagnétique (même porteuse).
- **Avantage:** Pas d'augmentation du débit binaire contrairement au multiplexage temporel.
  Pas de chevauchement sur d'autres bandes de fréquence utilisées contrairement au multiplexage fréquentiel.

CDMA: détails

- **Codage des symbôles binaires:** Chaque bit est converti en une séquence de nombres réels. Par contre les codes utisés pour deux communications différentes sont orthogonaux (produit scalaire nul):

$$(a_1, a_2, \ldots, a_N).(b_1, b_2, \ldots, b_N) =^{def} a_1 b_1 + \ldots + a_N b_N = 0.$$

- **Modulation:** Les séquences de symboles réels des conversations seront ajoutées pour former $s_0, \ldots, s_k, \ldots$ qui est transportée via le signal complexe par:

$$S(t) = s_k \exp(2i\pi f_0 t),$$

lorsque $t \in [k\tau, (k+1)\tau[$.

- **Réception:** Pour pouvoir séparer la communication des autres, on effectue le produit scalaire entre chaque suite de N symbôles reçus et le code.

Exemple d'utilisation de CDMA: émission

1. **Deux récepteurs GSM A et B:** L'antenne relais souhaite envoyer à A la suite 10101001 et à B la suite 11100110.
   Pour pouvoir multiplexer, pour A, on utilisera le code $(-1, 1)$ pour 1 et $(1, -1)$ pour 0 et pour B le code $(1, 1)$ pour 1 et $(-1, -1)$ pour 0.
   $$(-1, 1).(1, 1) = -1 + 1 = 0$$
2. **Contribution à envoyer à A:** La suite 10101001 est transformée en la suite
   $(-1, 1), (1, -1), (-1, 1), (1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, -1), (-1, 1)$.
3. **Contribution à envoyer à B:** La suite 11100110 est transformée en la suite $(1, 1), (1, 1), (1, 1), (-1, -1), (-1, -1), (1, 1), (1, 1), (-1, -1)$.
4. **Suite de symboles envoyer:**
   $(0, 2), (2, 0), (0, 2), (0, -2), (-2, 0), (2, 0), (2, 0), (-2, 0)$.

Exemple d'utilisation de CDMA: réception

1. **A la réception:** Suite de symbôles reçus $(0,2),(2,0),(0,2),(0,-2),(-2,0),(2,0),(2,0),(-2,0)$.
2. **Décodage par A:**

$$((0,2),(2,0),(0,2),(0,-2),(-2,0),(2,0),(2,0),(-2,0)).(-1,1) = (2,-2,2,-2,2,-2,-2,2)$$

   traduit en 10101001.

3. **Décodage par B:**

$$((0,2),(2,0),(0,2),(0,-2),(-2,0),(2,0),(2,0),(-2,0)).(1,1) = (2,2,2,-2,-2,2,2,-2)$$

   traduit en 11100110.

Autre exemple avec 3 nombres par bits

1. **Codage des bits:** Pour le récepteur A, 1 sera codé par $(1, 0, 0)$ et 0 par $(-1, 0, 0)$.
   Pour le récepteur B, 1 sera codé par $(0, 1, 0)$ et 0 par $(0, 0, 1)$ (!!! ce n'est pas toujours l'opposé).
2. **Informations à envoyer:** A doit recevoir 1100 et B doit recevoir 1011. L'antenne envoie la suite:

$$\begin{aligned}((1,0,0),(1,0,0),(-1,0,0),(-1,0,0))\\ +\\ ((0,1,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,0))\\ =((1,1,0),(1,0,1),(-1,1,0),(-1,1,0))\end{aligned}$$

Autre exemple avec 3 nombres par bits (réception)

1. **Décodage par *A*:**

$$((1,1,0),(1,0,1),(-1,1,0),(-1,1,0)).(1,0,0) = (1,1,-1,-1)$$

traduit par 1100.

2. **Décodage par *B*:**

$$((1,1,0),(1,0,1),(-1,1,0),(-1,1,0)).(0,1,0) = (1,0,1,1)$$

$$((1,1,0),(1,0,1),(-1,1,0),(-1,1,0)).(0,0,1) = (0,1,0,0)$$

traduit par 1011.

Taille du codage et choix du code

- **Taille du codage:** Si le nombre de récepteurs est égal à N, le code doit être de taille au moins égal à N:
  En effet, un code de taille d est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ (ensemble des d-uplets $(a_1, \ldots, a_d)$) et on ne peut pas trouver plus de d vecteurs orthogonaux.
- **Notion de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$:** Soient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ k vecteurs (ou d-uplets), le sous-espace engendré par $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ est l'ensemble des vecteurs $\alpha_1 \vec{u}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{u}_k$.
- **Orthogonalité de deux sous-espaces:** Deux sous-espaces E_1 et E_2 sont orthogonaux si les vecteurs de E_1 sont orthogonaux aux vecteurs de E_2.
- **Choix du code pour N récepteurs:** On choisit une longueur de code de taille $d \geq N$. On se donne N sous-espaces orthogonaux $E_1, \ldots, E_N$ dans $\mathbb{R}^d$ (simple si $d = N$). Pour le récepteur j, on choisit deux vecteurs de E_j: l'un pour coder 1, l'autre pour coder 0.

Exemple avec $d = N$

- **4 récepteurs A_1, A_2, A_3, A_4:** On prendra des codes de longueur 4.
- **Codage pour A_1:** 1 est codé par $(1, 0, 0, 0)$ et 0 par $(-1, 0, 0, 0)$.
- **Codage pour A_2:** 1 est codé par $(0, 1, 0, 0)$ et 0 par $(0, -1, 0, 0)$.
- **Codage pour A_3:** 1 est codé par $(0, 0, 1, 0)$ et 0 par $(0, 0, -1, 0)$.
- **Codage pour A_4:** 1 est codé par $(0, 0, 0, 1)$ et 0 par $(0, 0, 0, -1)$.

Autre exemple avec $d = N$

- 3 **récepteurs** A_1, A_2, A_3**:** On prendra des codes de longueur 3.
- **Codage pour** A_1**:** 1 est codé par $(1, 1, -1)$ et 0 par $(-2, -2, 2)$.
- **Codage pour** A_2**:** 1 est codé par $(1, 1, 2)$ et 0 par $(-1, -1, -2)$.
- **Codage pour** A_3**:** 1 est codé par $(1, -1, 0)$ et 0 par $(-10, 10, 0)$.

Exemple pour $d \geq N$

- **3 récepteurs A_1, A_2, A_3 et codes de longueur 4:** Soient E_1, E_2, E_3 trois sous-espaces orthogonaux tels que les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ s'écrivent comme somme (unique) de vecteurs de E_1, E_2 et E_3. Par exemple:
  - E_1 est engendré par $(1, 0, 0, 0)$.
  - E_2 est engendré par $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$.
  - E_3 est engendré par $(0, 0, 0, 1)$.
- **Codage pour A_1:** 1 codé par $(1, 0, 0, 0)$ et 0 codé par $(-1, 0, 0, 0)$.
- **Codage pour A_2:** 1 codé par $(0, 1, -2, 0)$ et 0 codé par $(0, 30, 10, 0)$.
- **Codage pour A_3:** 1 codé par $(0, 0, 0, 1)$ et 0 codé par $(0, 0, 0, -2)$.

Cas $d \geq N$: choix des vecteurs

Illustration par l'exemple: $d = 4$ et $N = 3$. On doit choisir 4 vecteurs et ensuite former 3 sous-espaces orthogonaux.
Le plus simple est de choisir les 4 vecteurs comme étant orthogonaux.

- **Choix du premier vecteur:** Par exemple $\vec{u_1} = (1, -1, 2, 1)$ (n'importe quel choix est possible sauf $(0, 0, 0, 0)$).
- **Choix du deuxième vecteur:** Il doit être orthogonal à $\vec{u_1}$, on doit donc résoudre $a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4 = 0$. On peut prendre $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$ et $a_4 = 1$ (d'autres choix possible). On a donc $\vec{u_2} = (1, 4, 1, 1)$.
- **Choix du troisième vecteur:** Doit être orthogonal aux deux premiers. On résout:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 + 4a_2 + a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$$

Cas $d \geq N$: choix des vecteurs

- **Choix du troisième vecteur:** On a:

$$a_1 - a_2 + 2a_3 = a_1 + 4a_2 + a_3,$$

donc:

$$-a_2 + 2a_3 = 4a_2 + a_3,$$

donc:

$$5a_2 = a_3.$$

On peut prendre $a_2 = 1$ et $a_3 = 5$ (autre choix possible).

En remplaçant dans le système du départ a_2 et a_3 par leur valeur, on a:

$$a_1 + a_4 = -9$$

On peut prendre $a_1 = -10$ et $a_4 = 1$.
Ainsi $\vec{u}_3 = (-10, 1, 5, 1)$.

Cas $d \geq N$: choix des vecteurs

- **Choix du quatrième vecteur:** Doit être orthogonal aux trois premiers, on résout:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 + 4a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ -10a_1 + a_2 + 5a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$$

On pose $a_4 = 1$ (n'importe quel autre choix non nul est possible), on se ramène à:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = -1 \\ a_1 + 4a_2 + a_3 = -1 \\ -10a_1 + a_2 + 5a_3 = -1 \end{cases}$$

Attention: Ici, on a autant d'équations que d'inconnues, donc on ne remplace pas une des inconnues par une valeur de notre choix.

Cas $d \geq N$: choix des vecteurs

- **Choix du quatrième vecteur:** La première équation donne $a_1 = -1 + a_2 - 2a_3$, on remplace dans les deux autres:

$$\begin{cases} (-1 + a_2 - 2a_3) + 4a_2 + a_3 = -1 \\ -10(-1 + a_2 - 2a_3) + a_2 + 5a_3 = -1 \end{cases}$$

Cela donne:

$$\begin{cases} 5a_2 - a_3 = 0 \\ -9a_2 + 25a_3 = -11 \end{cases}$$

De la première équation, on a $a_3 = 5a_2$, on remplace dans la deuxième:

$$-9a_2 + 125a_2 = -11$$

ainsi $116a_2 = -11$ donc $a_2 = -\frac{11}{116}$. On en déduit $a_3 = -\frac{55}{116}$. De $a_1 = -1 + a_2 - 2a_3$, on trouve $a_1 = -\frac{17}{116}$. On a fixé $a_4 = 1$.

Cas $d \geq N$: choix des vecteurs

- **Choix du quatrième vecteur:** On trouve donc $\vec{u}_4 = \left(-\frac{17}{116}, -\frac{11}{116}, -\frac{55}{116}, 1\right)$ mais il n'est pas beau.
  Je préfère $\vec{u}_4 = (-17, -11, -55, 116)$ qui est encore orthogonal aux trois autres.
- **Choix des trois espaces orthogonaux:** A ce stade, on a $\vec{u}_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 4, 1, 1)$, $\vec{u}_3 = (-10, 1, 5, 1)$ et $\vec{u}_4 = (-17, -11, -55, 116)$. On doit former 3 sous-espaces orthogonaux.
  On écrit 4 comme somme de trois nombres entiers strictement positifs, $4 = 2 + 1 + 1$. Un des espaces sera engendré par deux vecteurs et les deux autres par un seul. On choisit:
  - $E_1 = \langle (1, -1, 2, 1), (1, 4, 1, 1) \rangle$ pour le récepteur A_1. Par exemple, 1 codé par $(2, 3, 3, 2)$ et 0 par $(1, 4, 1, 1)$.
  - $E_2 = \langle (-10, 1, 5, 1) \rangle$ pour A_2, 1 codé par $(-10, 1, 5, 1)$ et 0 par $(10, -1, -5, -1)$.
  - $E_3 = \langle (-17, -11, -55, 116) \rangle$ pour A_3, 1 codé par $(-17, -11, -55, 116)$ et 0 par $(17, 11, 55, -116)$.

Cas $d \geq N$: Emission

- **Pour A_1:** Il doit recevoir 0011, la conrtibution sera $((1,4,1,1),(1,4,1,1),(2,3,3,2),(2,3,3,2))$.
- **Pour A_2:** Il doit recevoir 1001, la conrtibution sera $((-10,1,5,1),(10,-1,-5,-1),(10,-1,-5,-1),(-10,1,5,1))$.
- **Pour A_3:** Il doit recevoir 1101, la contribution sera $((-17,-11,-55,116),(-17,-11,-55,116),(17,11,55,-116),$ $(-17,-11,-55,116))$.
- **Total:** L'antenne relais enverra à tout le monde le code: $((-26,-6,-49,118),(-6,-8,-59,116),(29,13,53,-115),$ $(-25,-7,-47,119))$.

Cas $d \geq N$: Réception

- **Par A_1:** $(-26, -6, -49, 118).(2, 3, 3, 2) = 19$, $(-6, -8, -59, 116).(2, 3, 3, 2) = 19$, $(29, 13, 53, -115).(2, 3, 3, 2) = 26$ et $(-25, -7, -47, 119).(2, 3, 3, 2) = 26$, $(19, 19, 26, 26)$ traduit en 0011 ou 1100.
- **Par A_2:** $(-26, -6, -49, 118).(-10, 1, 5, 1) = 127$, $(-6, -8, -59, 116).(-10, 1, 5, 1) = -127$, $(29, 13, 53, -115).(-10, 1, 5, 1) = -127$ et $(-25, -7, -47, 119).(-10, 1, 5, 1) = 127$, $(127, -127, -127, 127)$ traduit en 1001 ou 0110.
- **Par A_3:** En exercice (1 quart-d'heure grand max).

Quantité d'information: signaux incompressibles

- **Signal incompressible:** Un signal incompressible de N bits est un signal dont on ne peut pas réduire le nombre de bits. Sa quantité d'information, notée H_{tot} est égale à N. Soit une quantité d'information par bits (appelée entropie de Shannon), notée $H = \frac{H_{tot}}{N}$ égale à 1.
- **Probabilité de réalisation d'un signal incompressible (aspect probabiliste):** Un signal incompressible est un signal très désordonné. La probabilité de réalisation de chaque bit est $\frac{1}{2}$ pour la valeur 0 et pour la valeur 1.
  La probabilité de réalisation d'un signal incompressible de longueur N est:
  $$P = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) \times \ldots \times \left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{N fois}} = \left(\frac{1}{2}\right)^N.$$
  On a: $H_{tot} = -\log_2(P)$.

Quantité d'information: tout type de signaux

- **Aspect probabiliste:** On peut modéliser un signal par la loi de probabilité des bits: Soit p_0 la probabilité qu'un bit soit égal à 0 et p_1 la probabilité qu'il soit égal à 1.
  La probabilité de réalisation du signal est (quand N tend vers l'infini):
  $$P = p_0^{Np_0} \times p_1^{Np_1}.$$
- **Quantité d'information:** La quantité d'information totale est:
  $$H_{tot} = -\log_2(P) = -N \times \left[p_0 \log_2(p_0) + p_1 \log_2(p_1)\right],$$
  et l'entropie de Shannon est:
  $$H = -\left[p_0 \log_2(p_0) + p_1 \log_2(p_1)\right].$$

Modélisation probabiliste des canaux

- **Signal à l'entrée:** X modélisé par $p_0 = \mathbb{P}(X = 0)$ et $p_1 = \mathbb{P}(X = 1)$ avec $p_0 + p_1 = 1$. Son entropie sera notée $H(X)$.
- **Signal à la sortie:** Y modélisé par $q_0 = \mathbb{P}(Y = 0)$ et $q_1 = \mathbb{P}(Y = 1)$ avec $q_0 + q_1 = 1$. Son entropie sera notée $H(Y)$.
- **Canal:** Modélisé par les probabilités $\mathbb{P}(Y = j|X = i)$: proba d'obtenir le bit j à la sortie lorsque c'est le bit i à l'entrée.

$$\begin{aligned} H(Y|X=i) = &-[\mathbb{P}(Y=0|X=i) \times \log_2(\mathbb{P}(Y=0|X=i)) \\ &+ \mathbb{P}(Y=1|X=i) \times \log_2(\mathbb{P}(Y=1|X=i))] \end{aligned}$$

est l'information due au bruit lorsque le bit d'entrée est i.
$H(Y|X) = p_0 H(Y|X = 0) + p_1 H(Y|X = 1)$ est l'information moyenne due au bruit. On a:

$$\underbrace{H(Y)}_{\text{Information en sortie}} = \underbrace{H(Y|X)}_{\text{Information due au bruit}} + \underbrace{I(X,Y)}_{\text{Information restante sur } X}.$$

Exemple 1: canal parfait

- **Modèle de canal:** $\mathbb{P}(Y = 0|X = 0) = 1$ et $\mathbb{P}(Y = 1|X = 1) = 1$.
- **Information due au bruit:** $H(Y|X = 0) = -[1 \times \log_2(1) + 0 \times \log_2(0)] = 0$ et $H(Y|X = 1) = 0$ donc $H(Y|X) = 0$.
- **Signal d'entrée:** $p_0 = \mathbb{P}(X = 0)$ et $p_1 = \mathbb{P}(X = 1)$.
- **Signal de sortie:** $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 0|X = 0)p_0 + \mathbb{P}(Y = 0|X = 1)p_1 = 1 \times p_0 + 0 \times p_1 = p_0$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = p_1$.
- **Information en sortie:** $H(Y) = H(X)$.
- **Information restante sur X:** $I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) - 0 = H(X)$.

Exemple 2: canal à inversion de bits

- **Modèle de canal:** $\mathbb{P}(Y = 1|X = 0) = 1$ et $\mathbb{P}(Y = 0|X = 1) = 1$.
- **Information due au bruit:**
  $H(Y|X = 0) = -[0 \times \log_2(0) + 1 \times \log_2(1)] = 0$ et $H(Y|X = 1) = 0$ donc $H(Y|X) = 0$.
- **Signal d'entrée:** $p_0 = \mathbb{P}(X = 0)$ et $p_1 = \mathbb{P}(X = 1)$.
- **Signal de sortie:** $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 0|X = 0)p_0 + \mathbb{P}(Y = 0|X = 1)p_1 = 0 \times p_0 + 1 \times p_1 = p_1$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = p_0$.
- **Information en sortie:**
  $H(Y) = -[p_1 \log_2(p_1) + p_0 \log_2(p_0)] = H(X)$.
- **Information restante sur X:**
  $I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) - 0 = H(X)$.

Exemple 3: canal à bruit maximal

- **Modèle de canal:** $\mathbb{P}(Y=0|X=0)=0.5$ et $\mathbb{P}(Y=1|X=1)=0.5$.
- **Information due au bruit:** $H(Y|X=0)=-[0.5\times\log_2(0.5)+0.5\times\log_2(0.5)]=-[0.5\times(-1)+0.5\times(-1)]=1$ et $H(Y|X=1)=1$ donc $H(Y|X)=1$.
- **Signal d'entrée:** $p_0=\mathbb{P}(X=0)$ et $p_1=\mathbb{P}(X=1)$.
- **Signal de sortie:** $\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(Y=0|X=0)p_0+\mathbb{P}(Y=0|X=1)p_1=0.5\times p_0+0.5\times p_1=0.5$ et $\mathbb{P}(Y=1)=0.5$.
- **Information en sortie:** $H(Y)=-[0.5\log_2(0.5)+0.5\log_2(0.5)]=1$.
- **Information restante sur X:** $I(X,Y)=1-1=0$.

Exemple 4: canal bruité symétrique

- **Modèle de canal:** $\mathbb{P}(Y = 0|X = 0) = 0.9$ et $\mathbb{P}(Y = 1|X = 1) = 0.9$.
- **Information due au bruit:** $H(Y|X = 0) = -[0.9 \times \log_2(0.9) + 0.1 \times \log_2(0.1)] \simeq 0.469$ et $H(Y|X = 1) \simeq 0.469$ donc $H(Y|X) \simeq 0.469$.
- **Signal d'entrée:** $p_0 = \mathbb{P}(X = 0)$ et $p_1 = \mathbb{P}(X = 1)$.
- **Signal de sortie:** $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 0|X = 0)p_0 + \mathbb{P}(Y = 0|X = 1)p_1 = 0.9 \times p_0 + 0.1 \times p_1$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1|X = 0)p_0 + \mathbb{P}(Y = 1|X = 1)p_1 = 0.1 \times p_0 + 0.9 \times p_1$.
- **Information en sortie:** $H(Y) = -[(0.9 \times p_0 + 0.1 \times p_1)\log_2(0.9 \times p_0 + 0.1 \times p_1) + (0.1 \times p_0 + 0.9 \times p_1)\log_2(0.1 \times p_0 + 0.9 \times p_1)]$: dépend du signal d'entrée.
- **Information restante sur X:** $I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X)$ dépend du signal d'entrée.

Exemple 4: canal bruité symétrique (suite)

- **Signal d'entrée déterministe:** $p_1 = 1$ et $p_0 = 0$ (uniquement des bits 1). On a $H(X) = 0$.
  $H(Y) = -[0.1 \log_2(0.1) + 0.9 \log_2(0.9)] = H(Y|X)$, donc
  $I(X, Y) = 0 = H(X)$.
- **Signal d'entrée aléatoire:** $p_1 = 0.8$ et $p_0 = 0.2$ (plus de 1 que de 0). On a $H(X) = -[0.8 \log_2(0.8) + 0.2 \log_2(0.8)] \simeq 0.7219$.
  $H(Y) = -[(0.9 \times 0.2 + 0.1 \times 0.8) \log_2(0.9 \times 0.2 + 0.1 \times 0.8) + (0.1 \times 0.2 + 0.9 \times 0.8) \log_2(0.1 \times 0.2 + 0.9 \times 0.8)] \simeq 0.8267$ donc
  $I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X) \simeq 0.3577$.
- **Signal à entropie maximale:** $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$. On a $H(X) = 1$.
  $H(Y) = -[(0.5 \times 0.9 + 0.5 \times 0.1) \log_2(0.5 \times 0.9 + 0.5 \times 0.1) + (0.5 \times 0.9 + 0.5 \times 0.1) \log_2(0.5 \times 0.9 + 0.5 \times 0.1)] = 1$ donc
  $I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X) \simeq 0.531$.

Exemple 5: canal bruité asymétrique

- **Modèle de canal:** $\mathbb{P}(Y = 0|X = 0) = 0.9$ et $\mathbb{P}(Y = 1|X = 1) = 0.7$.
- **Signal d'entrée:** $p_0 = \mathbb{P}(X = 0)$ et $p_1 = \mathbb{P}(X = 1)$.
- **Information due au bruit:** $H(Y|X = 0) = -[0.9 \times \log_2(0.9) + 0.1 \times \log_2(0.1)] \simeq 0.469$ et $H(Y|X = 1) = -[0.7 \times \log_2(0.7) + 0.3 \times \log_2(0.3)] \simeq 0.8813$ donc $H(Y|X) \simeq 0.469p_0 + 0.8813p_1$.
- **Signal de sortie:** $\mathbb{P}(Y = 0) = 0.9p_0 + 0.3p_1$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = 0.1p_0 + 0.7p_1$.
- **Information en sortie:** $H(Y) = -[(0.9p_0 + 0.3p_1)\log_2(0.9p_0 + 0.3p_1) + (0.1p_0 + 0.7p_1)\log_2(0.1p_0 + 0.7p_1)]$.
- **Information restante sur X:** $I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X)$ dépend doublement du signal d'entrée ($H(Y|X)$ dépend également du signal d'entrée).

Exemple 5: canal bruité asymétrique (suite)

- **Signal d'entrée déterministe:** $p_0 = 0$ et $p_1 = 1$. Alors $H(X) = 0$. $H(Y|X) \simeq 0.8813$. $H(Y) = -[0.3\log_2(0.3) + 0.7\log_2(0.7)] = H(Y|X)$ donc $I(X, Y) = 0$.
- **Signal d'entrée aléatoire:** $p_0 = 0.2$ et $p_1 = 0.8$. $H(X) \simeq 0.7219$. $H(Y|X) \simeq 0.469 \times 0.2 + 0.8813 \times 0.8 \simeq 0.7988$. $H(Y) = -[(0.9 \times 0.2 + 0.3 \times 0.8)\log_2(0.9 \times 0.2 + 0.3 \times 0.8) + (0.1 \times 0.2 + 0.7 \times 0.8)\log_2(0.1 \times 0.2 + 0.7 \times 0.8)] \simeq 0.9815$ donc $I(X, Y) \simeq 0.9815 - 0.7988 \simeq 0.1827$.
- **Signal d'entrée à entropie maximale:** $p_0 = 0.5$ et $p_1 = 0.5$. $H(X) = 1$. $H(Y|X) \simeq 0.469 \times 0.5 + 0.8813 \times 0.5 \simeq 0.6751$. $H(Y) = -[(0.9 \times 0.5 + 0.3 \times 0.5)\log_2(0.9 \times 0.5 + 0.3 \times 0.5) + (0.1 \times 0.5 + 0.7 \times 0.5)\log_2(0.1 \times 0.5 + 0.7 \times 0.5)] \simeq 0.971$ donc $I(X, Y) \simeq 0.971 - 0.6751 \simeq 0.2959$.

A retenir

- **Dans un canal parfait ou à inversion de bits:** L'information due au bruit est nulle, l'information $H(Y)$ à la sortie du canal ainsi que l'information $I(X, Y)$ restante sur X sont égales à l'information $H(X)$ de X.
- **Dans un canal à bruit maximal:** $H(Y) = H(Y|X) = 1$ et $I(X, Y) = 0$.
- **Dans un canal bruité symétrique:** $H(Y|X = 0) = H(Y|X = 1)$ donc $H(Y|X)$ ne dépend pas de X. En général, $H(Y)$ dépend de X donc $I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X)$ dépend de X.
- **Dans un canal bruité asymétrique:** $H(Y|X = 0) \neq H(Y|X = 1)$ donc $H(Y|X)$ dépend de X. En général, $H(Y)$ dépend de X et $I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X)$ dépend également de X.

Capacité de canal

- **Capacité de canal:** La plus grande valeur, notée C, de $I(X,Y)$. On dit qu'un signal X atteint la capacité du canal lorsque $I(X,Y) = C$.
- **Canal parfait ou à inversion de bits:** $C = 1$ et le signal à entropie maximale (cad $p_0 = p_1 = 0.5$) atteint la capacité de canal.
- **Canal à bruit maximal:** $C = 0$ et n'importe quel signal atteint sa capacité.
- **Canal bruité symétrique:** $C = 1 - H(Y|X)$ (ne pas oublier que $H(Y|X)$ ne dépend pas de X). Les signaux d'entropie maximale atteignent la capacité du canal.
- **Canal bruité asymétrique:** Pas de formule générale, on doit faire le calcul.

Exemple de calcul de capacité de canal asymétrique

- **Modèle de canal:** $\mathbb{P}(Y=0|X=0)=0.9$ et $\mathbb{P}(Y=1|X=1)=0.3$.
- **Information due au bruit:** $H(Y|X=0)=-[0.9\log_2(0.9)+0.1\log_2(0.1)]\simeq 0.469$ et $H(Y|X=1)=-[0.7\log_2(0.7)+0.3\log_2(0.3)]\simeq 0.8813$ donc $H(Y|X)=0.469p_0+0.8813p_1=0.469+0.4123p_1$.
- **Signal de sortie:** $\mathbb{P}(Y=0)=0.9p_0+0.7p_1=0.9-0.2p_1$ et $\mathbb{P}(Y=1)=0.1p_0+0.3p_1=0.1+0.2p_1$.
- **Information à la sortie:** $H(Y)=-[(0.9-0.2p_1)\log_2(0.9-0.2p_1)+(0.1+0.2p_1)\log_2(0.1+0.2p_1)]$.
- **Information restante sur X:** $I(X,Y)=-[(0.9-0.2p_1)\log_2(0.9-0.2p_1)+(0.1+0.2p_1)\log_2(0.1+0.2p_1)]-(0.469+0.4123p_1)$.

Exemple de calcul de capacité de canal asymétrique (suite)

- **Maximisation $I(X,Y)$:** Revient à minimiser:

$$\begin{aligned} J(p_1) &= (0.9-0.2p_1)\log_2(0.9-0.2p_1) \\ &+ (0.1+0.2p_1)\log_2(0.1+0.2p_1) \\ &+ 0.469+0.4123p_1. \end{aligned}$$

Comme $\log_2(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$, on minimise:

$$\begin{aligned} K(p_1) &= (0.9-0.2p_1)\ln(0.9-0.2p_1) \\ &+ (0.1+0.2p_1)\ln(0.1+0.2p_1) \\ &+ (0.469+0.4123p_1)\ln(2). \end{aligned}$$

- **Dérivée de K:**

$$-0.2\ln(0.9-0.2p_1)+0.2\ln(0.1+0.2p_1)+0.4123\ln(2).$$

Exemple de calcul de capacité de canal asymétrique (suite)

- **On résout:**

$$-0.2\ln(0.9-0.2p_1)+0.2\ln(0.1+0.2p_1)+0.4123\ln(2)=0,$$

ainsi:

$$0.2\ln(0.9-0.2p_1)-0.2\ln(0.1+0.2p_1)=0.4123\ln(2),$$

ainsi:

$$\ln\left(\left(\frac{0.9-0.2p_1}{0.1+0.2p_1}\right)^{0.2}\right)=\ln(2^{0.4123}),$$

ainsi:

$$\left(\frac{0.9-0.2p_1}{0.1+0.2p_1}\right)^{0.2}=2^{0.4123},$$

Exemple de calcul de capacité de canal asymétrique (suite)

- On a:

$$\frac{0.9 - 0.2p_1}{0.1 + 0.2p_1} = 2^{\frac{0.4123}{0.2}} \simeq 4.1742,$$

  donc:

$$0.9 - 0.2p_1 = 4.1742 \times (0.1 + 0.2p_1),$$

  ainsi $1.0348p_1 = 0.4826$ et donc $p_1 = 0.4664$ et $p_0 = 0.5336$.

- **Calcul de la capacité:** En remplaçant dans $I(X, Y)$ p_1 par sa valeur: $C = 0.047$ pour une information due au bruit égale à $H(Y|X) = 0.6613$.

En exercice

Calculer la capacité du canal ainsi que le signal atteignant la capacité du canal pour le canal défini par:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y=0|X=0) &= 0.5 \\ \mathbb{P}(Y=1|X=1) &= 0.99 \end{aligned}$$