Filtres numériques

25 février 2021

1 Introduction : Filtre linéaire analogique

1.1 Généralités

Dans cette partie, nous rappelons ce qu'est un filtre linéaire analogique. Un signal est une fonction X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $X(t)$ est la valeur du signal à l'instant t.
Un filtre analogique est déterminé par sa fonction de transfert H liant les transformées de Fourier du signal d'entrée et du signal de sortie par :

$$\hat{Y}(\omega) = H(\omega) \times \hat{X}(\omega),$$

où $\hat{X}(\omega)$ est la transformée de Fourier du signal d'entrée pris en la pulsation $\omega = 2\pi f$ et $\hat{Y}(\omega)$ est la transformée de Fourier du signal de sortie.
Une fonction importante est le gain du filtre qui est donné par :

$$G(\omega) = |H(\omega)|$$

Le gain renseigne sur quelles fréquences sont atténuées et quelles fréquences sont amplifiées.

1.2 Exemples : les filtres passe-bas de Butterworth

Le gain d'un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre $n \geq 1$ est donné par :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}},$$

où ω_0 est la pulsation de coupure à -3dB.

1.2.1 Exemple 1 : filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 1 :

Son gain est :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}},$$

sa fonction de transfert est donc de la forme :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + ia_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

telle que :

$$G(\omega) = |H(\omega)|$$

c'est à dire telle que :

$$\left|1 + ia_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right|^2 = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

en se souvenant que le module au carré est égal à partie réelle au carré **plus** partie imaginaire au carré, ainsi $a_1^2 = 1$. On peut donc choisir $a_1 = 1$ et la fonction de transfert est :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

1.2.2 Exemple 2 : filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 2 :

Son gain est :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}},$$

sa fonction de transfert est donc de la forme :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{1 + ia_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + \left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1 + ia_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \end{aligned}$$

On doit résoudre :

$$\left|1 + ia_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - a_2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right|^2 = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \tag{1}$$

ce qui nous donne $a_1^2 = 2$ donc on peut choisir $a_1 = \sqrt{2}$, ainsi :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\sqrt{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + \left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

1.2.3 Exemple 3 : filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 3 :

Son gain est :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^6}},$$

sa fonction de transfert est donc de la forme :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{1 + ia_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + a_2\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3} \\ &= \frac{1}{1 + ia_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - a_2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - i\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3} \end{aligned}$$

On doit résoudre :

$$\left|1 + ia_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - a_2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - i\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3\right|^2 = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^6$$

ce qui nous donne :

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^2 = 2a_2 \\ a_2^2 = 2a_1 \end{array}\right.$$

On peut donc prendre $a_1 = a_2 = 2$, ainsi :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + 2i\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 2\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3}$$

1.2.4 Exemple 4 : filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 4 :

Son gain est :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^8}},$$

sa fonction de transfert est donc de la forme :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{1 + ia_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + a_2\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + a_3\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 + \left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4} \\ &= \frac{1}{1 + ia_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - a_2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - ia_3\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4} \end{aligned}$$

On doit résoudre :

$$\left|1 + ia_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - a_2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - ia_3\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4\right|^2 = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^8$$

ce qui nous donne :

$$\left\{\begin{array}{c} a_1^2 = 2a_2 \\ a_2^2 = -2 + 2a_1a_3 \\ a_3^2 = 2a_2 \end{array}\right.$$

On peut poser $a_1 = a_3$ dans ce cas $a_2^2 = -2 + 4a_2$, ainsi $a_2^2 - 4a_2 + 2 = 0$. On peut choisir $a_2 = 2 + \sqrt{2}$, $a_1 = a_3 = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. Ainsi :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\sqrt{4+2\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + (2+\sqrt{2})\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \sqrt{4+2\sqrt{2}}\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 + \left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}$$

1.3 Filtre à résonance d'ordre 2

Il est obtenu en changeant $\sqrt{2}$ par une constante $A \in [0, \sqrt{2}]$ dans la fonction de transfert du filtre de Butterworth d'ordre 2. $A = 0$ correspond au maximum de résonance tandis que $A = \sqrt{2}$ est l'absence de résonance. Sa fonction de transfert est :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + iA\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

et son gain vaut :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (A^2 - 2)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}}$$

2 Obtention d'un filtre numérique à partir de sa version analogique

Dans toute la suite τ sera le pas d'échantillonnage du signal numérique en secondes. De plus, la version numérique d'un signal X est un vecteur $(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ où $X_n = X(n\tau)$.

2.1 Cas du filtre dérivatif

Le filtre dérivatif analogique a pour expression dans le domaine temporel :

$$Y = X' \tag{2}$$

où X' désigne la dérivée de X. Dans le domaine fréquentiel, un résultat de l'analyse de Fourier nous donne :

$$\hat{Y}(\omega) = i\omega\hat{X}(\omega)$$

Ainsi, la fonction de transfert du filtre dérivatif est :

$$H(\omega) = i\omega$$

Pour obtenir l'équivalent numérique du filtre dérivatif, nous allons approximer numériquement la dérivée. En intégrant l'expression (2), on obtient :

$$\int_{(n-1)\tau}^{n\tau} Y(t)dt = \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} X'(t)dt = X_n - X_{n-1}$$

En utilisant la méthode d'approximation de l'intégrale par aire du trapèze, on a :

$$\int_{(n-1)\tau}^{n\tau} Y(t)dt \simeq \frac{\tau}{2}(Y_n + Y_{n-1})$$

Ainsi, la version numérique du filtre dérivatif est donné par :

$$\frac{\tau}{2}(Y_n + Y_{n-1}) = X_n - X_{n-1}$$

c'est à dire :

$$Y_n = -Y_{n-1} + \frac{2}{\tau}(X_n - X_{n-1})$$

2.2 Cas général

Appelons Id l'opérateur qui à un signal échantillonné X associe le signal X (identité) et T l'opérateur qui à X associe le signal TX tel que $(TX)_n = X_{n-1}$ (retard). Alors, d'après précédemment, l'opérateur associé à la dérivée est donné par :

$$\Delta = \frac{2}{\tau} \times \frac{Id - T}{Id + T}$$

ce qui signifie que, le filtre dérivatif est équivalent à l'équation :

$$Y = \frac{2}{\tau} \times \frac{Id - T}{Id + T}(X)$$

c'est à dire :

$$(Id + T)Y = \frac{2}{\tau} \times (Id - T)(X)$$

c'est à dire :

$$Y_n + Y_{n-1} = \frac{2}{\tau} \times (X_n - X_{n-1})$$

Pour obtenir l'opérateur associé à un filtre, on remplace 1 par Id et $i\omega$ par l'opérateur de la dérivée Δ.

2.3 Exemples

2.3.1 Filtre de Butterworth d'ordre 1 :

Sa fonction de transfert est :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

L'opérateur est donc :

$$\begin{aligned} H &= \frac{Id}{Id + \frac{2}{\tau\omega_0} \times \frac{Id - T}{Id + T}} \\ &= \frac{\tau\omega_0(Id + T)}{\tau\omega_0(Id + T) + 2(Id - T)} \\ &= \frac{\tau\omega_0(Id + T)}{(\tau\omega_0 + 2)Id + (\tau\omega_0 - 2)T} \end{aligned}$$

Ainsi le schéma numérique s'écrit :

$$Y = \frac{\tau\omega_0(Id + T)}{(\tau\omega_0 + 2)Id + (\tau\omega_0 - 2)T}(X)$$

donc :

$$[(\tau\omega_0 + 2)Id + (\tau\omega_0 - 2)T]Y = \tau\omega_0(Id + T)(X)$$

ainsi :

$$(\tau\omega_0 + 2)Y_n + (\tau\omega_0 - 2)Y_{n-1} = \tau\omega_0(X_n + X_{n-1})$$

d'où :

$$Y_n = \frac{\tau\omega_0}{\tau\omega_0 + 2}(X_n + X_{n-1}) + \frac{2 - \tau\omega_0}{\tau\omega_0 + 2}Y_{n-1}$$

2.3.2 Filtre à résonance d'ordre 2 :

Le cas du filtre de Butterworth d'ordre 2 se traite de la même manière en prenant $A = \sqrt{2}$.
La fonction de transfert est :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + iA\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

En faisant attention que $i^2 = -1$, l'opérateur est :

$$\begin{aligned}
H &= \frac{Id}{Id + \frac{2A}{\tau\omega_0} \times \frac{Id-T}{Id+T} + \frac{4}{\tau^2\omega_0^2}\frac{(Id-T)^2}{(Id+T)^2}} \\
&= \frac{\tau^2\omega_0^2(Id + T)^2}{\tau^2\omega_0^2(Id + T)^2 + 2A\tau\omega_0(Id - T)(Id + T) + 4(Id - T)^2} \\
&= \frac{\tau^2\omega_0^2(Id + 2T + T^2)}{\tau^2\omega_0^2(Id + 2T + T^2) + 2A\tau\omega_0(Id - T^2) + 4(Id - 2T + T^2)} \\
&= \frac{\tau^2\omega_0^2(Id + 2T + T^2)}{(\tau^2\omega_0^2 + 2A\tau\omega_0 + 4)Id + (2\tau^2\omega_0^2 - 8)T + (\tau^2\omega_0^2 - 2A\tau\omega_0 + 4)T^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, le schéma numérique s'écrit :

$$[(\tau^2\omega_0^2+2A\tau\omega_0+4)Id+(2\tau^2\omega_0^2-8)T+(\tau^2\omega_0^2-2A\tau\omega_0+4)T^2](Y) = \tau^2\omega_0^2(Id+2T+T^2)(X)$$

d'où :

$$(\tau^2\omega_0^2+2A\tau\omega_0+4)Y_n+(2\tau^2\omega_0^2-8)Y_{n-1}+(\tau^2\omega_0^2-2A\tau\omega_0+4)Y_{n-2} = \tau^2\omega_0^2(X_n+2X_{n-1}+X_{n-2})$$

Ainsi :

$$Y_n = \frac{\tau^2\omega_0^2}{\tau^2\omega_0^2 + 2A\tau\omega_0 + 4}(X_n+2X_{n-1}+X_{n-2})+\frac{8-2\tau^2\omega_0^2}{\tau^2\omega_0^2 + 2A\tau\omega_0 + 4}Y_{n-1}+\frac{2A\tau\omega_0 - \tau^2\omega_0^2 - 4}{\tau^2\omega_0^2 + 2A\tau\omega_0 + 4}Y_{n-2}$$