

N° d'ordre : 5178

---

**Université LOUIS PASTEUR STRASBOURG I**

École Doctorale Mathématiques, Sciences de l'Information et de  
l'Ingénieur

**THÈSE**

présentée pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Louis Pasteur – Strasbourg I**  
**Discipline : Electronique, Electrotechnique, Automatique**  
**(Spécialité : Imagerie Optique)**

par

**AINOUZ Samia**

**Analyse et traitement d'images multidimensionnelles de  
polarisation**

Soutenue publiquement le 13 Octobre 2006

**Jury :**

DE MARTINO Antonello  
DEVLAMINCK Vincent  
HIRSCH Ernest  
POTTIER Eric  
STOLL Marc-Philippe  
ZALLAT Jihad

*Examineur*  
*Rapporteur externe*  
*Rapporteur interne*  
*Rapporteur externe*  
*Directeur de thèse*  
*Examineur*

*À mon mari  
À mes très chers parents  
Ainsi qu'à toute personne qui compte à mes yeux*



# Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire des Sciences de l'image de l'Informatique et de la Télédétection (LSIIT), au sein de l'équipe TRIO (Télédétection, Radiométrie et Imagerie Optique). Je remercie M. Marc Philippe STOLL mon directeur de thèse et Mme Françoise NERRY, responsable de l'équipe TRIO, pour m'avoir accueilli au sein de leur groupe de recherche et aidé à trouver le climat et le cadre nécessaire à l'aboutissement de ce travail.

Je voudrai tout particulièrement remercier M. Jihad ZALLAT, Maître de Conférence à l'Université Louis Pasteur et encadrant de ma thèse au quotidien, pour son soutien, sa disponibilité et ses conseils judicieux qui ont permis la réalisation de ce travail.

J'exprime ma reconnaissance envers M. Ernest HIRSCH, Professeur au LSIIT et directeur de mon école doctorale, M. Vincent DEVLAMINCK, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, et M. Eric POTTIER, Professeur à l'Université de Rennes 1, d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail. Ces remerciements s'adressent aussi à M. Antonello DE MARTINO, Chargé de Recherche à l'École Polytechnique de Paris, qui a accepté de participer au jury de cette thèse, et qui a contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie tous mes collègues de TRIO sans exception, pour leur contribution à la bonne ambiance qui a caractérisé le déroulement de cette thèse.

Je ne remercierai jamais assez ceux qui comptent le plus à mes yeux. Que ma famille et en particulier mes parents qui m'ont toujours soutenue pour réaliser l'essentiel de ma vie, trouve ici une petite preuve de mon amour. Je remercie de tout mon coeur mon très cher mari pour son soutien constant et son amour.



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Rappels sur la polarisation</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	1
1.2 Formalismes de la polarisation . . . . .	2
1.2.1 Formalisme de Jones - matrice de cohérence . . . . .	2
1.2.2 Représentation de Stockes - Sphère de Poincaré . . . . .	4
1.3 Matrice de Mueller . . . . .	7
1.3.1 Définitions et propriétés . . . . .	7
1.3.2 Considérations physiques - réalisabilité physique . . . . .	8
1.3.3 Matrice de Mueller-Jones . . . . .	12
1.3.4 Décomposition polaire . . . . .	12
1.4 Récapitulatif . . . . .	21
1.5 Algèbre et formalisme de polarisation . . . . .	21
1.5.1 Introduction à l'algèbre géométrique . . . . .	21
1.5.2 Bivecteur, Trivecteur et Multivecteur . . . . .	22
1.5.3 Produit géométrique . . . . .	25
1.5.4 Applications . . . . .	27
1.5.5 Application à la polarisation . . . . .	29
1.6 Conclusion . . . . .	32
<b>2 Imagerie polarimétrique</b>	<b>35</b>
2.1 Introduction . . . . .	35
2.2 Les composants optiques polarimétriques . . . . .	36
2.2.1 Diatténuateurs . . . . .	36

2.2.2	Déphaseurs . . . . .	37
2.3	Principe de la mesure . . . . .	38
2.4	Optimisation du système . . . . .	40
2.4.1	Cas de l'imagerie de Stokes . . . . .	40
2.4.2	Analyse des erreurs de mesure en imagerie de Mueller . . . . .	43
2.5	Discussion et analyse . . . . .	45
2.5.1	Efficacité de modulation . . . . .	46
2.5.2	Impact du bruit de l'image . . . . .	47
2.6	Configuration optimale des polarimètres imageurs . . . . .	48
2.6.1	Polarimètres à un déphaseur en rotation . . . . .	48
2.6.2	Polarimètres à deux déphaseurs en rotation . . . . .	50
2.6.3	Polarimètres à déphaseurs variables . . . . .	52
2.6.4	Simulations et résultats . . . . .	52
2.7	Conclusion . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Filtrage des images polarimétriques</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Origine et forme du bruit . . . . .	57
3.3	Incidence du bruit sur les mesures polarimétriques . . . . .	58
3.3.1	Bruit additif . . . . .	58
3.3.2	Bruit multiplicatif . . . . .	59
3.4	Méthodes de filtrage classiques . . . . .	59
3.4.1	Méthode du Scatter plot . . . . .	60
3.4.2	Méthode du masquage des données . . . . .	63
3.4.3	Estimation du bruit par vectorisation des données selon la courbe de Piano-Hilbert . . . . .	65
3.5	Filtrage du bruit des images polarimétriques . . . . .	68
3.6	Conclusion . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Segmentation et interprétation physique par prévisualisation couleur</b>	<b>77</b>
4.1	Introduction et objectifs . . . . .	77
4.2	Algorithmes des K-means et des Fuzzy K-means . . . . .	78
4.3	Les espaces couleurs . . . . .	80
4.3.1	Espace HSV . . . . .	80
4.3.2	Espace CIELAB . . . . .	82

---

4.3.3	Des paramètres de Stokes à l'espace couleur . . . . .	83
4.4	Prévisualisation couleur des images codées en polarisation . . . . .	86
4.4.1	Classification des images codées en polarisation . . . . .	86
4.4.2	Applications et algorithme de représentation couleur . . . . .	89
4.5	De l'imagerie de Mueller à l'espace couleur . . . . .	92
4.6	Segmentation des images de Mueller par HSV-means . . . . .	94
4.7	Segmentation des images de Mueller en utilisant les quaternions . . . . .	95
4.8	Conclusion . . . . .	96
<b>Conclusion générale</b>		<b>107</b>
<b>Annexes</b>		<b>109</b>
<b>A Quelques rappels mathématiques</b>		<b>109</b>
A.1	Symboles . . . . .	109
A.1.1	fonction de Heaviside . . . . .	109
A.1.2	la fonction sign . . . . .	109
A.1.3	Symbole de Kronecker . . . . .	109
A.1.4	Symbole de Levi-Civita . . . . .	109
A.2	Opérations sur les quaternions . . . . .	110
A.2.1	Somme . . . . .	110
A.2.2	Produit . . . . .	110
A.2.3	Opposé . . . . .	110
A.2.4	Conjugaison . . . . .	111
A.2.5	Inverse . . . . .	111
A.2.6	Division . . . . .	111
A.2.7	Notation matricielle . . . . .	111
A.3	Espace de Minkowski . . . . .	112
<b>B Système de représentations d'une matrice de Mueller par un quaternion</b>		<b>113</b>
B.1	Préambule . . . . .	113
B.1.1	Solution multivecteur . . . . .	113
B.1.2	Exemple . . . . .	115
B.2	Borne supérieure de l'erreur relative sur le vecteur de Stokes expérimental .	117



<b>C</b>	<b>Estimation du bruit sous contraintes de réalisabilité physique</b>	<b>119</b>
C.1	Technique de filtrage avec contraintes . . . . .	119
C.2	Résolution . . . . .	120
C.2.1	$\Delta \geq 0$ . . . . .	120
C.2.2	$\Delta < 0$ . . . . .	121
C.3	Filtrage . . . . .	121
<b>D</b>	<b>Liste des publications</b>	<b>123</b>
D.1	Revue internationale avec comité de lecture . . . . .	123
D.2	Conférences internationales avec comité de lecture . . . . .	123
	<b>Bibliographie</b>	<b>125</b>

# Table des figures

1.1	Paramètres d'un état de polarisation elliptique . . . . .	2
1.2	Sphère de Poincaré . . . . .	6
1.3	Courbes de niveau de la fonction $P'(\theta, \phi)$ pour la matrice de Howell . . . . .	11
1.4	Le vecteur $a$ prolongé sur le vecteur $b$ . . . . .	22
1.5	Le bivecteur $a \wedge b$ étendu sur le vecteur $c$ : trivecteur . . . . .	24
2.1	Principe d'un polarimètre en transmission. . . . .	39
2.2	Allure de la borne supérieure de l'erreur relative du vecteur de Stokes pour $\theta = [15.12^\circ, 51.69^\circ, 308.31^\circ, 344.88^\circ]$ . . . . .	42
2.3	Allure de la borne supérieure de l'erreur relative du vecteur de Stokes pour $\theta = [193.23^\circ, 230.85^\circ, 127.98^\circ, 344.88^\circ]$ . . . . .	43
2.4	Les trois fonctions objectives en fonction de l'angle $\theta_4$ dans le cas d'un polarimètre à lame quart d'onde. . . . .	49
2.5	Les efficacités de modulation d'un polarimètre à lame quart d'onde en fonction de l'angle $\theta_4$ . . . . .	50
2.6	Les efficacités de modulation d'un polarimètre optimal en fonction de l'angle $\theta_4$ . . . . .	51
2.7	Configuration d'un polarimètre de Stokes à deux déphaseurs $\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}$ ou $\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}$ en rotation . . . . .	51
2.8	Images de Stokes reconstruites à partir des images intensités bruitées, (a) correspond au polarimètre standard. (b) au polarimètre à deux déphaseurs quart d'onde . . . . .	53
2.9	Images de Stokes filtrées des deux configurations étudiées, (a) du polarimètre à lame quart d'onde en rotation. (b) du polarimètre à deux déphaseurs quart d'onde . . . . .	54
3.1	Images utilisées pour la validation des méthodes d'estimation du bruit. (a) Image d'un échiquier. (b) Image d'une coupe extraite d'une IRM 3D de la tête . . . . .	61
3.2	Plans $(\mu, \sigma)$ correspondant aux images des. (a) figure (3.1.a), (b) figure (3.1.b) en utilisant la méthode d'estimation par vectorisation selon la courbe de Piano-Hilbert . . . . .	68
3.3	Image de synthèse de référence. . . . .	69
3.4	Image intensité bruitée . . . . .	70
3.5	Image de Stokes bruitée . . . . .	71

---

3.6	Image binaire du paramètre de la réalisabilité physique $\alpha$ . . . . .	72
3.7	Image de Stokes filtrée du bruit . . . . .	73
3.8	Images intensités acquises à l'aide d'un polarimètre classique . . . . .	74
3.9	Image de Stokes correspondant aux images intensités de la figure (3.8) après inversion . . . . .	75
3.10	Image de Stokes filtrée du bruit . . . . .	76
4.1	Teinte, saturation et valeur . . . . .	81
4.2	Cône HSV . . . . .	82
4.3	Cylindre HSV . . . . .	83
4.4	Sphère Lab . . . . .	84
4.5	Sphère de Poincaré . . . . .	85
4.6	Image de Stokes d'une coupe histologique d'un os imagée à $650nm$ . (a). $S_0$ , (b). $S_1$ , (c). $S_2$ , (d). $S_3$ . . . . .	90
4.7	Image HSV de la coupe histologique de l'os. (a). teinte, (b). saturation, (c).valeur . . . . .	91
4.8	Image Lab de la coupe histologique de l'os. (a). Luminance, (b). canal $a$ , (c).canal $b$ . . . . .	91
4.9	Carte de segmentation pour 4 classes, résultat de l'application de l'algorithme des HSV-means sur l'image HSV de la coupe histologique de l'os . . . . .	92
4.10	Carte de segmentation pour 4 classes, résultat de l'application de l'algorithme des Lab-means sur l'image Lab de la coupe histologique de l'os . . . . .	93
4.11	Nouveau canal intensité après égalisation d'histogramme. (a) dans le cas HSV, (b) dans le cas Lab . . . . .	94
4.12	Représentation en couleur HSV de l'image de Stokes. L'affichage est en RGB	95
4.13	Représentation en couleur LAB de l'image de Stokes. L'affichage est en RGB	96
4.14	Image de Stokes d'un vaisseau sain . . . . .	97
4.15	Image de Stokes d'un vaisseau pathologique . . . . .	98
4.16	Image couleur du vaisseau sain. (a) espace HSV, (b) espace Lab . . . . .	98
4.17	Image couleur du vaisseau pathologique. (a) espace HSV, (b) espace Lab . . . . .	99
4.18	Image de Mueller d'une section histologique d'un os . . . . .	100
4.19	Décomposition polaire de l'image de Mueller de l'os : (a) image diatténuation, (b) image Retardance, (c) image dépolarisation . . . . .	100
4.20	Carte de segmentation pour 4 classes de l'algorithme des HSV-means appliqué à l'image HSV de la section histologique de l'os . . . . .	101
4.21	Nouveau canal $V$ après égalisation d'histogrammes . . . . .	101
4.22	Représentation couleur de l'image de Mueller de l'os dans l'espace HSV, le résultat est affiché en RGB . . . . .	102
4.23	Carte de segmentation par quaternions pour 4 classes de l'image de Mueller de la coupe histologique de l'os . . . . .	103
4.24	Carte de segmentation par quaternions pour 6 classes de l'image de Mueller de la coupe histologique de l'os . . . . .	104
4.25	Prévisualisation couleur de l'image de Mueller de l'os en utilisant les quaternions, affichage RGB . . . . .	105

---

C.1	Tableau de variations de la fonction $f(\alpha)$ . . . . .	120
-----	--	-----



# Introduction générale

Les méthodes optiques modernes connaissent un engouement croissant pour l'imagerie de polarisation, comme en témoigne la littérature scientifique récente. En effet, l'imagerie polarimétrique trouve des applications dans divers domaines de la science, à savoir ; le diagnostic médical, la télédétection, la caractérisation des surfaces et des éléments optiques, la métrologie, etc. Avec l'intensité, la cohérence et la longueur d'onde, la polarisation est une caractéristique fondamentale de l'onde électromagnétique qui est par essence vectorielle. Cet aspect vectoriel porte sans équivoque l'empreinte de la géométrie et de la physique des processus d'interaction onde-milieux. Ainsi, la prise en compte de cette nature vectorielle permet, non seulement de pallier un certain nombre de limitations inhérentes aux systèmes d'imagerie classique, mais d'accéder également à une caractéristique complémentaire riche en information aux retombées applicatives très prometteuses. La mise en œuvre de cette modalité d'imagerie nécessite cependant des compétences complémentaires empruntées à la physique, au traitement d'image ainsi qu'à l'algèbre de polarisation. La description moderne de la lumière polarisée fait appel à plusieurs formalismes géométriques ou algébriques. Le formalisme le plus général est celui de Stokes-Mueller. Il permet de décrire la polarisation en terme d'intensité ; il s'agit d'une représentation vecteurs-matrices, où la polarisation de l'onde est décrite par un vecteur réel  $4 \times 1$  appelé vecteur de Stokes et l'action d'un système linéaire par une matrice réelle  $4 \times 4$  dite matrice de Mueller. L'imagerie de Mueller est alors définie comme la mesure des matrices de Mueller attachées à chaque pixel de l'image. L'image ainsi codée en polarisation admet une structure multidimensionnelle de dimension 16 où une information multicomposante est attachée à chaque pixel. Jusqu'à présent, l'image polarimétrique considérée comme simple support d'information et les traitements qui lui sont appliqués sont orientés vers les pixels sans considérer la distribution bidimensionnelle de cette information dans l'image. D'où la nécessité de développer un arsenal d'outils de traitement orientés «zone» afin de tirer pleinement profit, de façon conséquente, de l'entité «image». Si le formalisme de Stokes-Mueller est parfaitement adapté aux mesures intégrées (détecteur ponctuel), il impose des contraintes très fortes lorsqu'il s'agit de systèmes imageurs. En effet l'ensemble des vecteurs de Stokes n'a aucune structure mathématique. Ils ne forment pas un espace vectoriel ; il en va de même des matrices de Mueller physiquement acceptables. Ceci rend impossible la définition de mesures de similitudes entre les classes dans une image codée en polarisation. Par ailleurs l'absence de la notion de distance entre deux grandeurs polarimétriques complique considérablement l'application de tests de validité des matrices acquises expérimentalement et la prise en compte de l'information polarimétrique dans les algorithmes de traitement d'images multidimensionnelles. En effet, une grandeur polarimétrique mesurée doit satis-

faire un certain nombre de contraintes pour assurer sa validité physique. Par exemple, toute matrice réelle  $4 \times 4$  n'est pas forcément une matrice de Mueller. Le travail de cette thèse s'articule principalement sur la recherche d'une structure mathématique unique qui permet de représenter aussi bien la polarisation de l'onde (totalement ou partiellement polarisée) que l'action de tout système linéaire (dépolarisant ou non). L'approche choisie consiste en la généralisation de la représentation quaternionique de la polarisation dans le cadre de l'algèbre géométrique. Nous pourrions ainsi définir formellement les notions de distances, de projecteurs, d'espaces complémentaires, etc. Ces notions sont essentielles pour les traitements algorithmiques des images codées en polarisation, pour définir les notions de coût, de similitude, d'appartenance à une classe ou encore pour la détermination de l'état optimal du détecteur afin de maximiser le contraste polarimétrique du signal reçu dans les dispositifs temps réels.

### **Objectifs du travail de thèse**

Le travail de la thèse concerne les développements nécessaires à la mise en œuvre efficace de systèmes imageurs polarimétriques. Cela comporte plusieurs volets allant de la théorie amont à la mise en œuvre d'algorithmes de traitement d'images spécifiques. Les principaux objectifs du travail sont :

- la représentation algébrique des formalismes de polarisation en utilisant les quaternions
- l'optimisation des polarimètres imageurs et le calcul de l'erreur sur les mesures
- l'estimation et le filtrage du bruit des images polarimétriques
- la classification et la prévisualisation couleur des images codées en polarisation.

### **Structure du mémoire**

Après un bref rappel des théories existantes, le premier chapitre présente un nouveau formalisme qui permet de représenter les matrices de Mueller non dépolarisantes par des entités mathématiques plus maniables : les quaternions. La forme générale d'un vecteur de Stokes est mise en correspondance avec un quaternion réel représenté par un multivecteur dans une algèbre géométrique. De même, nous démontrons que toute matrice de Mueller non dépolarisante, vue comme un opérateur linéaire ayant 7 degrés de libertés, peut être mise sous forme d'un quaternion complexe. Ainsi, l'action d'un système optique sur une onde monochromatique qui se traduit classiquement par la multiplication de la matrice de Mueller du système par le vecteur de Stokes de l'onde s'écrit comme le produit géométrique du quaternion correspondant à la matrice de Mueller par le multivecteur représentant le vecteur de Stokes. Cette utilisation de l'algèbre géométrique pour représenter une classe des éléments polarimétriques, permet de définir formellement la notion de distance, de similitude et d'appartenance à une classe, notions qui ne sont pas envisageables sur les matrices de Mueller. Ce résultat est de première importance pour le traitement des images codées en polarisation pour garantir la conséquence des traitements en liaison avec les spécificités de cette modalité d'imagerie. Cela est illustré avec des procédures de segmentation appliquées sur des images de Mueller réelles.

Le deuxième chapitre s'intéresse au mode opératoire des polarimètres imageurs. En

---

effet, la mise en œuvre d'un polarimètre imageur n'est pas évidente. Elle nécessite l'utilisation d'un analyseur d'états de polarisation dans le cas de l'imagerie de Stokes et d'un générateur d'états de polarisation supplémentaire pour l'imagerie de Mueller, bien conditionnés pour permettre l'inversion des images «intensité» pour obtenir l'image polarimétrique. Même après une procédure d'étalonnage précise, des incertitudes persistent sur les mesures. Cela est dû principalement au caractère non idéal des éléments optiques utilisés, aux erreurs de désalignement ainsi qu'au bruit photonique sur le capteur CCD. Dans ce chapitre, nous étudions quantitativement la propagation des erreurs et du bruit jusqu'aux images codées en polarisation. L'utilisation du produit de Kronecker a permis de démontrer qu'un formalisme mathématique unique peut être utilisé pour l'étude du bruit et des erreurs dans l'élaboration de polarimètres de Stokes ou de Mueller. La contribution principale est une théorie étendue des erreurs et du bruit dans les dispositifs polarimétriques. L'originalité vient de la minimisation conjointe des erreurs systématiques et du bruit de l'image dès l'étape de conception. Plusieurs fonctions de mérites sont ainsi introduites pour permettre la définition des caractéristiques du polarimètre optimal. Une solution originale d'un polarimètre optimal utilisant des éléments optiques standards est également proposée.

Le bruit aléatoire dans les images multibandes est traité dans le troisième chapitre du manuscrit. Son existence est inhérente aux systèmes imageurs et ne peut en aucun cas être totalement éliminée même dans les systèmes optimaux définis dans le chapitre précédent. Sa présence dégrade en général l'interprétation des données. Causé par différents mécanismes, il peut dans le cas de l'imagerie polarimétrique, induire le caractère non physique des mesures. Il convient donc de l'éliminer ou *a fortiori* de minimiser son effet. Après justification de l'approximation gaussienne du bruit qui peut affecter les différents canaux polarimétriques, les bruits de natures additives (dans le cas d'un éclairage incohérent) et multiplicative (pour le cas d'un éclairage cohérent par laser) sont traités en utilisant une nouvelle variante de la méthode du «scatter plot» combinée avec une vectorisation de l'image par un parcours de type Piano-Hilbert pour préserver la connexité des pixels et minimiser l'impact des points aberrants. Cette méthode est couplée avec le masquage de données qui élimine la structure informationnelle de l'image avant l'estimation des paramètres du bruit dans l'image. La méthode de masquage de données repose sur l'utilisation de la différence entre deux approximations de l'opérateur Laplacien. Les performances et les biais de notre approche sont étudiées statistiquement par la méthode du «Bootstrap».

L'importance de l'imagerie polarimétrique vient de la richesse informationnelle qu'elle fournit sur la nature locale de l'objet imagé. Par ailleurs, l'image codée en polarisation est vue comme une image multidimensionnelle de dimension 4 pour les images de Stokes et de dimension 16 pour l'image de Mueller, ce qui rend délicat leur interprétation physique. De plus, le contenu informationnel de ces structures multidimensionnelles est combiné de façon complexe entre les différents canaux, ce qui implique la nécessité d'un outil adéquat permettant l'analyse et la compréhension de ces images. Dans le dernier chapitre du manuscrit, nous abordons le problème de l'analyse des images polarimétriques et explorons le potentiel de cette information pour la classification des différents pixels de ces images. Nous proposons une représentation colorée *ad hoc* des images codées en polarisation comme une aide à leur interprétation en fonction de leur contenu physique. Cette représentation utilise la décomposition polaire pour le cas de l'imagerie de Mueller et



deux mappages entre la sphère de Poincaré et un espace de couleur paramétrique dans le cas de l'imagerie de Stokes. Une carte de segmentation est ensuite utilisée comme une information *a priori* et une égalisation d'histogrammes intra-classes afin de permettre la meilleure distribution de l'information physique dans l'espace des couleurs choisi. Le processus de segmentation est basé sur la famille des algorithmes des K-means dans lesquels les distances sont redéfinies pour prendre en compte la spécificité des images qui nous intéressent. L'intérêt majeur de cette démarche est de proposer une carte couleur mono-vue qui résume des informations qui sont dispersées sur 4 ou 16 canaux différents. Ce résultat est le prolongement naturel des théories présentées dans le premier chapitre. Cette démarche est illustrée sur des images de Stokes et de Mueller de tissus biologiques.

# Chapitre 1

## Rappels sur la polarisation

### 1.1 Introduction

Dans son plan d'onde, le champ électrique d'une onde plane, progressive, de pulsation  $\omega$ , de phase  $\phi$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}$  et d'amplitudes  $E_x, E_y$  s'écrit dans la base orthonormale  $B = \{u_x, u_y\}$  sous la forme suivante [39] :

$$\vec{E} = \text{Re}[(E_x(t)\vec{u}_x + E_y(t)\vec{u}_y)\exp(i(-\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t + \phi(t)))] \quad (1.1)$$

Lorsque les amplitudes  $E_x, E_y$  et la phase  $\phi$  sont indépendantes du temps, l'onde est dite monochromatique ou complètement polarisée .

Dans ce cas, le vecteur champ électrique décrit dans son plan d'onde fixe une trajectoire fermée [39], [68] qui est en général elliptique (Fig1.1). Sous certaines conditions liées aux amplitudes et à la phase, l'ellipse de polarisation peut dégénérer en un segment de droite ou un cercle. Selon que cette trajectoire est elliptique, linéaire ou circulaire, l'état de polarisation est dit elliptique, linéaire ou circulaire. Dans le cas général, l'ellipse de polarisation est caractérisée par son azimut (inclinaison)  $\psi$  et son ellipticité  $\chi(\tan \chi = \frac{b}{a})$ (voir Fig(1.1)).

Notons que  $E_x^2 + E_y^2 = a^2 + b^2$

Lorsque les amplitudes et la phase du champ électrique dépendent d'une manière aléatoire du temps, l'onde est dite, complètement dépolarisée.

Entre ces deux cas extrêmes, l'onde est partiellement polarisée.

L'interaction d'une onde électromagnétique avec un milieu quelconque, engendre une altération de l'état de polarisation incident, due au caractère physique et géométrique de la cible [76]. Cette interaction est décrite par des formalismes mathématiques bien définis : Le formalisme de Jones pour les ondes complètement polarisées, et le formalisme de Stokes-Mueller ou matrice de cohérence de Wolf dans le cas général. Ces formalismes sont équivalents pour les ondes complètement polarisées et les systèmes optiques non-dépolarisants [65].

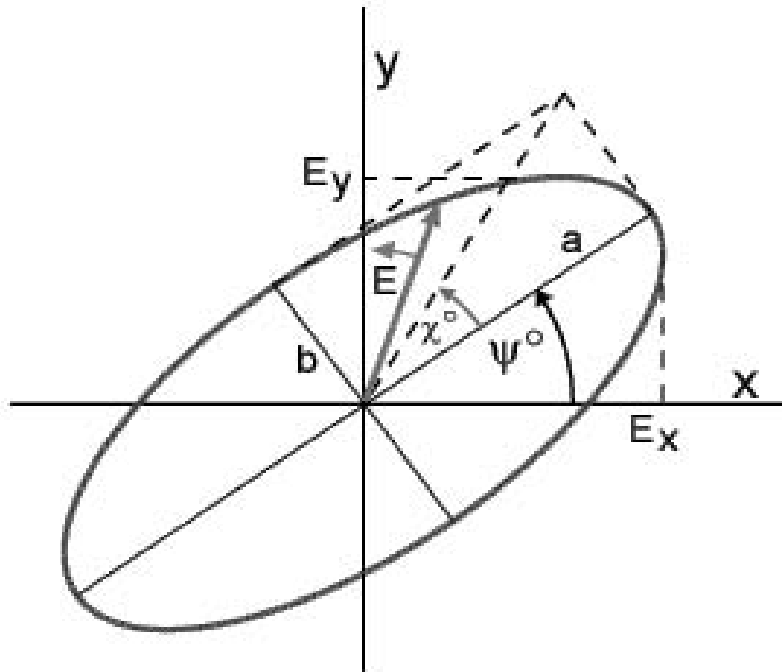


FIG. 1.1 – Paramètres d'un état de polarisation elliptique

Dans ce chapitre, nous rappellerons ces différents formalismes et les relations qui les lient. Nous décrirons ensuite, les outils nécessaires (décomposition polaire, algèbre géométrique) pour la suite de ce travail.

## 1.2 Formalismes de la polarisation

### 1.2.1 Formalisme de Jones - matrice de cohérence

#### Vecteur de Jones- Matrice de Jones

Le vecteur de Jones (introduit par Clark Jones en 1941) est une représentation concise de la polarisation de l'onde [76]. Il est défini par le vecteur complexe suivant :

$$V = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x e^{i\phi_x} \\ E_y e^{i\phi_y} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Où  $\phi_x$  et  $\phi_y$  sont les phases absolues dans les directions des composantes  $u_x$  et  $u_y$  de la base orthonormale. L'intensité d'une onde est alors donnée par le produit direct du vecteur  $V$  par son transposé conjugué :

$$I_0 = V^\dagger V \quad (1.3)$$

De la même manière, un système optique déterministe (non-dépolarisant) est représenté par un opérateur linéaire complexe  $2 \times 2$  nommé «matrice de Jones» qu'on note  $J$ . L'action d'un tel système sur une onde polarisée de vecteur de Jones  $V$ , se traduit par une multiplication matricielle générant à la sortie le vecteur de Jones  $V'$  [39] :

$$V' = JV \quad (1.4)$$

L'action séquentielle de  $N$  systèmes optiques de matrices de JONES respectives

$$J_1, J_2, \dots, J_N$$

s'écrit alors :

$$V' = \prod_{i=1}^N J_{N-i+1} V \quad (1.5)$$

Un vecteur de Jones  $V$  peut toujours s'écrire comme une combinaison linéaire dans une base orthonormale quelconque  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$

$$V = V_1 u_1 + V_2 u_2 \quad (1.6)$$

Le choix de cette base est arbitraire du moment que celle-ci est orthonormale. Le passage d'une base à une autre est donc possible moyennant un opérateur linéaire appelé «matrice de passage» [76].

### Matrice de cohérence de Wolf

Dans le cas des ondes partiellement polarisées [39], les paramètres  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $\phi_x$  et  $\phi_y$  peuvent avoir une dépendance temporelle aléatoire autour d'une valeur moyenne. Afin de traiter ce caractère aléatoire de l'onde, on définit une matrice intermédiaire appelée «matrice de cohérence» ou matrice de densité spectrale  $\Phi$ . Cette matrice représente la covariance des composantes  $V_x$  et  $V_y$  de l'onde. Elle est définie comme la moyenne temporelle du produit direct du vecteur de Jones instantané  $V(t)$  et de son transposé conjugué :

$$\Phi = \langle V(t) \otimes V^\dagger(t) \rangle = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle V_1(t)V_1^\dagger(t) \rangle & \langle V_1(t)V_2^\dagger(t) \rangle \\ \langle V_2(t)V_1^\dagger(t) \rangle & \langle V_2(t)V_2^\dagger(t) \rangle \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

avec :

$$V(t) = \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x(t)e^{i\phi(t)} \\ E_y(t)e^{i\psi(t)} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Cette matrice hermitienne, définie positive par construction, décrit entièrement une onde partiellement polarisée. Sa trace représente l'intensité totale  $I_0$  de l'onde.

Elle est également un moyen efficace d'expliquer l'évolution d'une onde incidente et émergente d'un système optique non-dépolarisant. En effet, soit  $V$  le vecteur de Jones d'une onde dans une base de polarisation  $\mathcal{B}$  quelconque et  $\Phi$  sa matrice de cohérence correspondante. Soit  $V'$  le vecteur de Jones de cette onde dans une autre base  $\mathcal{B}'$  ou la transformée

linéaire de  $V$  par un opérateur optique de matrice de Jones  $J$ , i.e.,  $V' = JV$ . La matrice de cohérence associée à  $V'$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\Phi' &= \langle V'V'^{\dagger} \rangle \\ &= \langle JVV^{\dagger}J^{\dagger} \rangle \\ &= J\langle VV^{\dagger} \rangle J^{\dagger} \\ &= J\Phi J^{\dagger}\end{aligned}\tag{1.9}$$

Cette relation permet d'exprimer la matrice de cohérence dans toute base de polarisation et d'établir un lien entre la matrice de cohérence et le formalisme de Jones [39].

La matrice de cohérence d'une onde peut être décomposée d'une manière unique en la somme d'une matrice de cohérence d'une onde complètement dépolarisée et d'une matrice de cohérence d'une onde complètement polarisée :

$$\phi = \phi_D + \phi_P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & D \\ D^* & C \end{bmatrix}\tag{1.10}$$

Avec  $A, B, C \geq 0$  et  $BC - DD^* = 0$ .

Notons également que la matrice de cohérence correspondant à la somme incohérente d'ondes lumineuses est la somme des matrices de cohérence des ondes individuelles.

A ce stade nous pouvons introduire une mesure quantitative du caractère aléatoire de l'onde appelée «degré de polarisation» [76]. Il est défini par le rapport de l'intensité de la composante polarisée de l'onde sur l'intensité totale :

$$P = \frac{I_{pol}}{I_0} = \sqrt{1 - \frac{4det(\Phi)}{tr(\Phi)^2}}\tag{1.11}$$

Le degré de polarisation est un paramètre physique qui caractérise la nature d'une onde lumineuse. Il varie entre 0 et 1 selon l'état de polarisation de l'onde :

- $P = 1$  lorsque l'onde est complètement polarisée : un seul état de polarisation existe
- $P = 0$  lorsque l'onde est complètement dépolarisée. Dans ce cas la matrice de cohérence est proportionnelle à la matrice identité. C'est en effet une combinaison uniforme de deux états de polarisation quelconques orthogonaux.
- entre ces deux cas extrêmes, l'onde est partiellement polarisée.

La matrice de cohérence est par conséquent une généralisation du concept de la représentation vectorielle de la lumière. La combinaison linéaire des éléments de la matrice de cohérence est à la base du formalisme plus général : le formalisme de Stokes.

## 1.2.2 Représentation de Stokes - Sphère de Poincaré

### Paramètres de Stokes

La représentation de Jones ne fait appel qu'aux composantes du champ électrique et n'est valable qu'aux états totalement polarisés. Dans le domaine optique seules les intensités sont mesurables. En 1852, Sir G. G. Stokes a introduit quatre paramètres réels

pour représenter les ondes de polarisation quelconque [39], [45], [76]. Ces paramètres s'obtiennent à partir des éléments de la matrice de cohérence, et sont définis par :

$$\begin{aligned} S_0 &= \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle \\ S_1 &= \langle E_x^2 \rangle - \langle E_y^2 \rangle \\ S_2 &= 2\langle E_x E_y \cos(\phi_y - \phi_x) \rangle \\ S_3 &= 2\langle E_x E_y \sin(\phi_y - \phi_x) \rangle \end{aligned} \quad (1.12)$$

Les paramètres de Stokes sont définis par des grandeurs directement observables par des détecteurs optiques. Il peuvent également être définis comme :

$$S_0 = \langle I_x + I_y \rangle, S_1 = \langle I_x - I_y \rangle, S_2 = \langle I_{+45^\circ} - I_{-45^\circ} \rangle, S_3 = \langle I_G - I_D \rangle$$

où  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{+45^\circ}$ ,  $I_{-45^\circ}$ ,  $I_G$  et  $I_D$  sont respectivement les intensités observées à travers un polariseur linéaire placé à  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $+45^\circ$ ,  $-45^\circ$ , et à travers un polariseur circulaire gauche et droit,  $I_0$  étant l'intensité totale de l'onde. Nous avons  $I_0 = \langle I_x + I_y \rangle = \langle I_{+45^\circ} + I_{-45^\circ} \rangle = \langle I_G + I_D \rangle$ . On démontre également que pour toute onde, ces paramètres vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} S_0 &\geq 0 \\ S_0^2 &\geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Les paramètres de Stokes s'interprètent comme [76] :

- $S_0$  est l'intensité totale de l'onde.
- $S_1$  est la tendance de l'onde à ressembler à une vibration linéaire horizontale ( $S_1$  positif) ou verticale ( $S_1$  négatif).
- $S_2$  et  $S_3$  traduisent la nature et le sens de rotation de l'onde.

Ces paramètres sont groupés dans un vecteur réel  $4 \times 1$  que l'on appelle le vecteur de Stokes  $S$ .

Le degré de polarisation décrit la part aléatoire d'une onde électromagnétique. On le définit à partir des paramètres de Stokes par :

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \quad (1.14)$$

### Remarques

- L'intérêt de la matrice de cohérence  $\Phi$  vient du fait que l'on peut calculer l'évolution de cette matrice, donc l'évolution du degré de polarisation dans un système optique caractérisé par sa matrice de Jones [39].
- Un vecteur de Stokes d'une lumière partiellement polarisée s'écrit comme la somme d'un vecteur de Stokes d'une lumière totalement polarisée et d'un vecteur de Stokes d'une lumière non polarisée. De la même manière, une matrice de cohérence s'écrit comme la somme d'une matrice de cohérence d'une onde non polarisée et de la matrice de cohérence d'une onde polarisée

$$S = S_{NP} + S_P \quad (1.15)$$

- La matrice de cohérence peut être écrite dans d'autres bases orthogonales que dans sa base rectiligne. La relation matricielle correspondante est définie comme

$$\Phi' = T.\Phi.T^{-1} \quad (1.16)$$

où  $T$  est la matrice de changement de base.

- La matrice  $T$  est unitaire, le degré de polarisation ne dépend donc pas de la base choisie.

### Sphère de Poincaré

Le vecteur de Stokes normalisé à son premier élément  $S_0$  peut être représenté par un point dans une sphère unité, nommée *Sphère de Poincaré* (d'après Henri Poincaré) [65], [45], [7]. La représentation de Poincaré permet de représenter géométriquement et d'une manière unique une lumière partiellement ou totalement polarisée. Elle permet une interprétation physique élégante de la propagation des états de polarisation. La figure(1.2) montre un exemple de sphère de Poincaré et la position d'un état de polarisation  $P$  sur cette sphère .

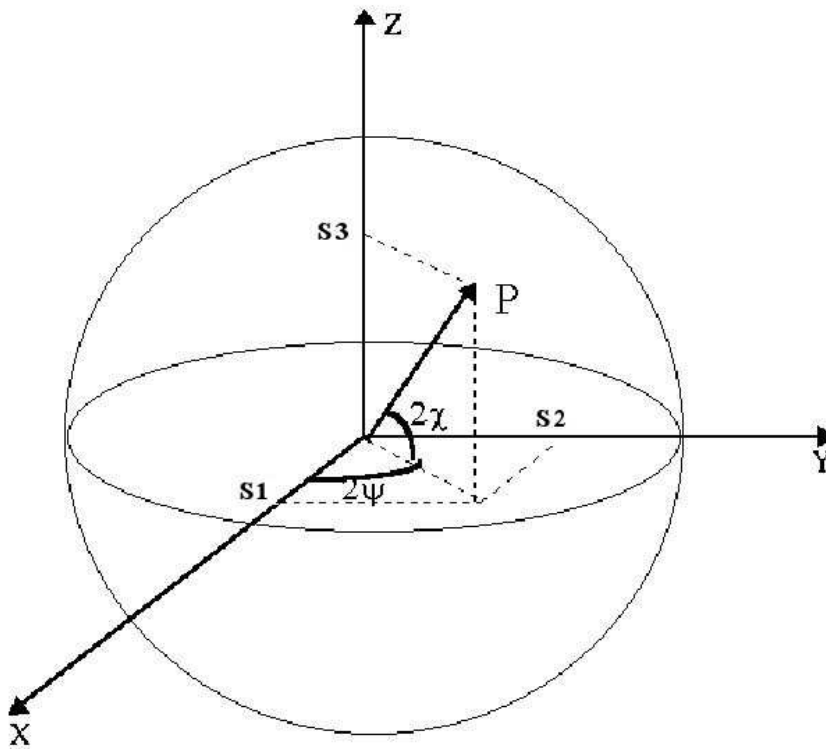


FIG. 1.2 – Sphère de Poincaré

L'azimut  $\psi$  et l'ellipticité  $\chi$  d'une onde, correspondent au site et à l'élévation du point correspondant sur la sphère. Chaque parallèle de la sphère correspond à des états de polarisation d'azimut fixe et chaque méridien représente des états dont l'ellipticité est

fixe.

Les pôles nord (N) et sud (S) représentent deux états orthogonaux : l'état circulaire droit et l'état circulaire gauche. Ces points sont d'ellipticité  $\pm 1$  et d'azimut indéterminé.

Le cercle équatorial représente les états de polarisation rectiligne (ellipticité nulle).

Deux points diamétralement opposés sur la sphère représentent deux états de polarisation orthogonaux. Un point  $P$  quelconque sur la sphère sera caractérisé par sa longitude  $2\psi$  ( $-\pi \leq 2\psi \leq \pi$ ) et par sa latitude  $2\chi$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq 2\chi \leq \frac{\pi}{2}$ ). Ce point représente un état de polarisation elliptique qui est gauche si  $\chi$  est positif, droit sinon. La longitude est positive lorsqu'elle orientée dans le sens direct tandis que la latitude l'est lorsque elle pointe vers le pôle sud. Les coordonnées du point  $P$  sur la sphère sont données par :

$$P = \begin{cases} \frac{S_1}{S_0} = \cos(2\psi) \cos(2\chi) \\ \frac{S_2}{S_0} = \sin(2\psi) \cos(2\chi) \\ \frac{S_3}{S_0} = \sin(2\chi) \end{cases} \quad (1.17)$$

Une lumière complètement polarisée est représentée par un point unique sur la surface de la sphère. Une lumière complètement dépolarisée [39] peut être vue comme contenant tous les états et par conséquent, elle serait représentée par une distribution uniforme de points sur toute la surface de la sphère. Dans le cas d'une lumière partiellement polarisée, les points représentatifs sur la sphère de Poincaré se regroupent autour du point  $P$  qui est le point de probabilité maximum de l'état de polarisation. Plus la largeur de cette distribution sera étroite autour de  $P$ , plus la lumière se comportera comme une lumière polarisée. Ce comportement est quantifié par le degré de polarisation de l'onde.

## 1.3 Matrice de Mueller

### 1.3.1 Définitions et propriétés

L'action d'un système optique linéaire, passif, sur une onde incidente de vecteur de Stokes  $S$ , se traduit par un opérateur linéaire réel  $4 \times 4$ , dit «matrice de Mueller». Le vecteur de Stokes de l'onde émergente est donné par

$$S' = MS \quad (1.18)$$

Notons que la matrice de Mueller d'un objet quelconque dépend également des conditions d'interaction (géométrie, longueur d'onde). Pour une configuration géométrique donnée, la matrice de Mueller d'un objet résume toute l'information énergétique et polarimétrique de cet objet [45], [39], [76].

La matrice de Mueller d'une cascade de  $N$  objets, se traduit par la multiplication des  $N$  matrices de Mueller élémentaires et dans l'ordre de leur apparition dans le système

$$M = M_n.M_{n-1}...M_2.M_1 \quad (1.19)$$



### 1.3.2 Considérations physiques - réalisabilité physique

Un opérateur réel  $4 \times 4$  correspond à une matrice de Mueller si et seulement si, lorsqu'il est appliqué à tout vecteur de Stokes, donne un vecteur de Stokes physiquement admissible. Un vecteur de Stokes est physiquement admissible s'il vérifie les deux conditions de l'équation (1.13), ou d'une manière équivalente si son degré de polarisation ne dépasse pas l'unité.

Les conditions d'admissibilité physique ont été largement étudiées dans la littérature [17], [30], [50], [43]. Nous citerons dans la section suivante les plus utilisées.

#### Condition de Givens et Kostinski

La condition de Givens et Kostinski [17] est une condition nécessaire et suffisante, basée sur l'utilisation de la métrique de Lorentz définie par la matrice  $G = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Une matrice  $M = (m_{ij})_{i,j=0,1,2,3}$  est de Mueller si et seulement si

1.  $M_{00} > 0$
2. Le spectre de  $GM^tGM$  est réel
3. Le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre est un vecteur de Stokes physique.

#### Conditions de Sridhar et Simon

Sridhar et Simon [64] ont énoncé une multitude de théorèmes équivalents pour satisfaire la réalisabilité physique d'une matrice de Mueller.

Si  $G$  est la métrique de Lorentz définie précédemment, l'ensemble des vecteurs vérifiant  $S^tGS \geq 0$  forment un cône solide  $C$  (intérieur et frontière). Soit  $C^+$  la branche positive du cône, c'est-à-dire les points de  $C$  pour lesquels  $S_0 \geq 0$ . Il est évident que  $C^+$  est un ensemble convexe de l'espace de Minkowski  $\mathcal{M}_{3,1}$  (voir annexe A).

On désigne par  $\mathcal{L}$  l'ensemble des transformations linéaires dans l'espace de Minkowski et par  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  le sous-ensemble de  $\mathcal{L}$  ayant un déterminant positif de  $\mathcal{L}$  et préservant la signature de  $S_0$ .

**Théorème 1.** *Une matrice  $M$ ,  $4 \times 4$ , réelle et non singulière est de Mueller si et seulement si*

1.  $M_{00} > 0$
2. il existe une transformation de Lorentz  $L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  telle que

$$L^t M^t G M L = G D$$

$$D = \text{diag}(d_0, d_1, d_2, d_3) \tag{1.20}$$

$$d_0 \geq d_j > 0, j = 1, 2, 3$$

Notons que les  $d_i$  sont les valeurs propres de  $GM^tGM$ . La  $i^{me}$  colonne de  $L$  est définie comme le  $i^{me}$  vecteur propre  $V_i$  de  $GM^tGM$  normalisé par la valeur  $V_i^tGV_i$ .

**Théorème 2.** *Une matrice  $M$ ,  $4 \times 4$ , réelle et non singulière est de Mueller si et seulement si*

$$M = (L'_M)^t \Lambda_M L_M, \quad (1.21)$$

$$L'_M, L_M \in \mathcal{L}_+^\uparrow$$

$$\Lambda_M = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$\lambda_0 \geq |\lambda_j| > 0, j = 1, 2, 3$$

L'équation (1.21) est appelée la forme canonique de  $M$ .

Notons que les matrices  $L_M$  et  $L'_M$  sont contruites à partir des vecteurs propres des matrices  $GM^tGM$  et  $GMGM^t$  disposées en colonnes dans l'ordre décroissant des valeurs propres.

Soit

$$M = \begin{bmatrix} 0.7599 & -0.0623 & 0.0295 & 0.1185 \\ -0.0573 & 0.4687 & -0.1811 & -0.1863 \\ 0.0384 & -0.1714 & 0.5394 & 0.0282 \\ 0.1240 & -0.2168 & -0.0120 & 0.6608 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

la matrice de Mueller expérimentale du radiomètre-collimateur de Howell [38], connu pour son caractère non physique. Les facteurs  $L'_M, L_M$  et  $\Lambda_M$  sont :

$$L_M = \begin{bmatrix} 1.0073 & -0.0570 & 0.0275 & 0.1031 \\ -0.1175 & 0.6011 & -0.3756 & -0.7151 \\ 0.0268 & 0.1784 & -0.7994 & 0.5743 \\ -0.0108 & -0.7811 & -0.4696 & -0.4117 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

$$L'_M = \begin{bmatrix} 1.0019 & -0.0091 & 0.0149 & 0.0599 \\ -0.0538 & 0.5823 & -0.3928 & -0.7138 \\ 0.0224 & 0.2124 & -0.7718 & 0.5998 \\ 0.0222 & -0.7848 & -0.5002 & -0.3666 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$\Lambda_M = \begin{bmatrix} 0.7474 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8179 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5787 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2612 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

On vérifie aisément que la matrice  $\Lambda_M$  n'est pas dominée par sa première valeur. Par conséquent, la matrice  $M$  n'est pas physiquement réalisable. On peut aussi confirmer ce résultat par la condition de Givens et Kostinski. En effet, les valeurs propres de  $GM^tGM$  sont respectivement 0.6689, 0.5586, 0.3349 et 0.0682. Ces valeurs sont réelles, cependant c'est 0.5586 qui correspond à un vecteur propre physique, or cette valeur n'est pas dominante. Ce qui confirme la non réalisabilité physique de  $M$ .

### Conditions de José J. Gil (Conditions de Cloude)

On appelle  $H$  la matrice de cohérence associée à la matrice de Mueller  $M = (m_{ij})_{i,j=0,1,2,3}$  [20]. Elle est définie de la manière suivante :

$$H = \frac{1}{4} \sum_{k,l=0}^3 m_{kl} E_{kl} \quad (1.26)$$

où  $E_{kl}$  sont les seize matrices de Dirac. La matrice  $H$  est hermitienne par construction. La semi-définie positivité de cette matrice est fortement liée à la réalisabilité physique de la matrice de Mueller; une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit physiquement de Mueller est que les valeurs propres de  $H$  soient toutes réelles et positives [30],[19]. Cette condition est la plus utilisée car plus simple à vérifier, mais elle est fortement sensible au bruit de mesure, ce qui peut faire basculer légèrement les valeurs propres proches de zéro vers des valeurs négatives. Ceci est le cas de toutes les conditions de réalisabilité liées aux valeurs propres.

### Conditions paramétriques

Il existe dans la littérature un très grand nombre de conditions concernant la réalisabilité physique de la matrice de Mueller. Parmi celles-ci, on trouve souvent la condition de paramétrisation du degré de polarisation [60], [50], [44], [24]. Il s'agit de construire des fonctions paramétriques ayant comme paramètres, le vecteur de Stokes physique à l'entrée, les éléments de la matrice de Mueller et le vecteur de Stokes à la sortie. Le vecteur de Stokes peut aussi être représenté par ses angles sur la sphère de Poincaré. La condition imposée est l'optimisation d'une fonctionnelle liée au degré de polarisation du vecteur de Stokes à la sortie, de sorte à ce que le maximum de cette fonctionnelle soit inférieur ou égal à 1 en utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange. On cite comme exemple la condition de Kumar et Simon [60] où il a été prouvé que le test de réalisabilité physique des matrices de Mueller se réduit à l'ensemble des vecteurs de Stokes purs et d'intensité 1. Une matrice de Mueller est physiquement réalisable si et seulement si elle associe à chaque vecteur de Stokes pur d'intensité 1, un vecteur de Stokes physique à la sortie du système. La paramétrisation du degré de polarisation se fait de la manière suivante : Si on écrit la matrice de Mueller  $M$  sous la forme partitionnée suivante :

$$M = \begin{bmatrix} m_{00} & \underline{v}^t \\ \underline{u} & A \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

L'action de  $M$  sur un état pur  $S^i = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{n} \end{bmatrix}$  est donnée par :

$$S' = \begin{bmatrix} m_{00} & \underline{v}^t \\ \underline{u} & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} + \underline{v}^t \hat{n} \\ \underline{u} + A \hat{n} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

La matrice  $M$  est de Mueller si et seulement si

$$\begin{aligned} m_{00} + \underline{v}^t \hat{n} &\geq 0, \\ (m_{00} + \underline{v}^t \hat{n})^2 - |\underline{u} + A \hat{n}| &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Ce qui est équivalent à

$$m_{00} \geq \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2}, \quad (1.30)$$

$$P'(\hat{n}) = \frac{|u + A\hat{n}|}{(m_{00} + v^t \hat{n})} \leq 1$$

$P'(\hat{n})$  est le degré de polarisation de l'onde à la sortie du système représenté par  $M$ . Le paramètre inconnu est  $\hat{n}$ . En paramétrant  $P$  en fonction des coordonnées polaires sur la sphère de Poincaré, la condition nécessaire et suffisante de la réalisabilité physique de la matrice de Mueller devient :

$$m_{00} \geq \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2}, \quad (1.31)$$

$$\max_{\theta, \phi} P'(\theta, \phi) \leq 1$$

Sur l'exemple de l'équation (1.22), la première condition de l'équation (1.31) est satisfaite, mais en examinant la courbe de niveau de la fonction  $P'(\theta, \phi)$  (figure(1.3) ), on voit que le maximum situé dans les zones blanches excède la valeur 1 et vaut 1.109.

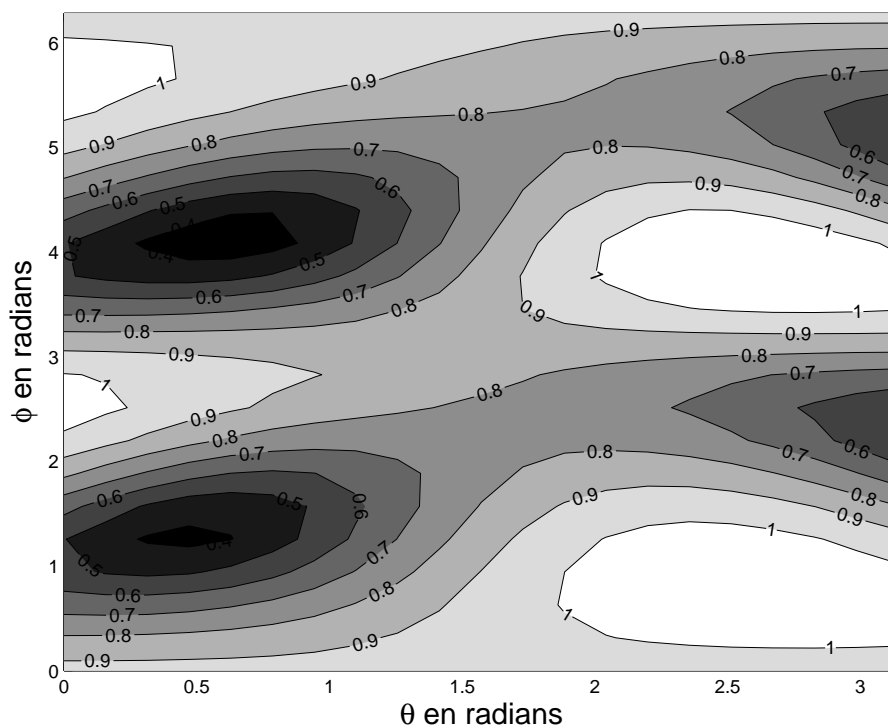


FIG. 1.3 – Courbes de niveau de la fonction  $P'(\theta, \phi)$  pour la matrice de Howell

Ce maximum est atteint pour le vecteur de Stokes  $S(\hat{n})$

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.589 \\ -0.349 \\ -0.729 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Ce qui correspond à  $\theta = 0.76\pi$  et  $\phi = 1.83\pi$ . L'action de  $M$  sur  $S(\hat{n})$  donne

$$S' = \begin{pmatrix} 0.627 \\ 0.418 \\ -0.271 \\ -0.481 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

$S'$  n'est pas physiquement admissible.

### 1.3.3 Matrice de Mueller-Jones

Tout système optique peut être représenté par une matrice de Mueller. Soit un système non-dépolarisant, de matrice de Jones  $J$ . On démontre que la matrice de Mueller correspondante s'obtient par [26] :

$$M = A(J \otimes J^*)A^{-1} \quad (1.34)$$

où  $\otimes$  est le produit de Kronecker (annexe A) et  $A$  est donné par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

On trouve dans littérature une multitude de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice de Mueller soit aussi de Mueller-Jones [50], c'est-à-dire liée à une matrice de Jones par la relation (1.34). Anderson et Barakat [26] montrent qu'une matrice de Mueller est de Mueller-Jones si et seulement si la matrice de cohérence  $H$  correspondante est de rang 1. Ils ont énoncé des conditions nécessaires et suffisantes pour que le système de l'équation (1.34) admette une solution en imposant des relations entre les éléments de la matrice de Mueller, afin de parvenir aux éléments de la matrice de Jones correspondante. Fry et Katawar [28] montrent qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$  admette une matrice de Jones est que  $trace(M) = 4M_{00}$ .

### 1.3.4 Décomposition polaire

La décomposition polaire d'une matrice de Mueller est un moyen efficace pour déterminer le dichroïsme, le déphasage et la dépolarisation introduits par un échantillon. Le problème de la décomposition de la matrice de Mueller a été largement traité dans la littérature [18],[64], [31], [73]. Cloude [18] a montré qu'une matrice de Mueller peut toujours s'écrire comme la somme de quatre matrices non dépolarisantes. Xing [73] précise que toute matrice de Mueller peut s'exprimer comme le produit de trois matrices de

Mueller : une matrice non dépolarisante suivie d'une matrice diagonale suivie d'une autre matrice non dépolarisante.

La décomposition polaire a été introduite par Lu et Chipman[52]. Ils ont montré qu'une matrice de Mueller non singulière peut se décomposer d'une manière unique comme le produit d'un diatténuateur suivi par un déphaseur qui est ensuite suivi par un dépolariseur.

Les matrices de Mueller sont divisées en deux catégories, les matrices non dépolarisantes et les matrices dépolarisantes [73]. La décomposition polaire peut être traitée différemment suivant que la matrice est dépolarisante ou non.

### Décomposition des matrices de Mueller non-dépolarisantes

#### *Diatténuation et polarisance*

Un élément optique diatténuateur [45] agit sur les amplitudes des composantes du champ électrique. Sa transmission en intensité dépend de l'état de polarisation incident. La diatténuation caractérise le pouvoir en transmission selon deux états de polarisation qui caractérisent les états propres du diatténuateur. L'axe de diatténuation est défini par l'état propre attaché à la plus grande transmittance (le carré de la plus grande valeur propre de sa matrice de Jones). Supposons que cet axe soit décrit par le vecteur de Stokes  $(1, d_1, d_2, d_3) = (1, \hat{D}^t)^t$  avec  $\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} = |\hat{D}| = 1$ . Le vecteur diatténuation est :

$$\vec{D} = D\hat{D} = \begin{pmatrix} Dd_1 \\ Dd_2 \\ Dd_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_H \\ D_{45} \\ D_C \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

$D_H$ ,  $D_{45}$  et  $D_C$  sont appelées respectivement diatténuation horizontale, linéaire à 45° et circulaire. La diatténuation linéaire  $D_L$  est caractérisée par les deux premiers éléments et est égale à  $\sqrt{D_H^2 + D_{45}^2}$ . La diatténuation scalaire est définie par :

$$D = \sqrt{D_H^2 + D_{45}^2 + D_C^2} = \sqrt{D_L^2 + D_C^2} = |\vec{D}| \quad (1.37)$$

Le vecteur diatténuation  $\vec{D}$  est entièrement décrit par son module  $|\vec{D}|$  et son axe  $(1, \hat{D}^t)^t$

#### *Pouvoir diatténuateur d'une matrice de Mueller*

Soit une matrice de Mueller  $M = (m_{ij})_{i,j=0,1,2,3}$ , les coefficients de transmittance maximum  $T_{max}$  et minimum  $T_{min}$ , de  $M$  sont donnés par [8] :

$$T_{min}^{max} = m_{00} \pm \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} \quad (1.38)$$

Ces transmittances sont obtenues pour les vecteurs de Stokes incidents suivants [8] :

$$\hat{S}_{min}^{max} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \frac{m_{01}}{\sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2}} \\ \pm \frac{m_{02}}{\sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2}} \\ \pm \frac{m_{03}}{\sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2}} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

Ces deux vecteurs sont complètement polarisés et orthogonaux. On définit alors la diatténuation scalaire  $D$  de la matrice  $M$  par [51] :

$$D = \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max} + T_{min}} = \frac{1}{m_{00}} \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} \quad (1.40)$$

$D$  varie entre 0 (déphaseur idéal par exemple) et 1 (polariseur idéal). Il en résulte que le vecteur diatténuation d'une matrice  $M$  est donné par :

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} D_H \\ D_{45} \\ D_R \end{pmatrix} = -\frac{1}{m_{00}} \begin{pmatrix} m_{01} \\ m_{02} \\ m_{03} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

Dans ce cas les vecteurs de Stokes  $\hat{S}_{max}$  et  $\hat{S}_{min}$  peuvent être redéfinis comme suit :

$$\hat{S}_{max} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{D} \end{pmatrix}, \hat{S}_{min} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{D} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

L'axe de diatténuation est donné par le vecteur  $\hat{S}_{max}$ .

### ***Polarisance d'une matrice de Mueller***

Soit un état incident non polarisé. Le vecteur de Stokes à la sortie d'un système optique de matrice  $M$  est déterminé par la première colonne de cette matrice. Le degré de polarisation  $DOP$  de l'état émergent est appelé Polarisance [52]. La polarisance est donnée par :

$$P = \frac{1}{m_{00}} \sqrt{m_{10}^2 + m_{20}^2 + m_{30}^2} \quad (1.43)$$

avec  $0 \leq P \leq 1$ . D'une manière similaire, le concept de polarisance peut être généralisé au vecteur polarisance  $\vec{P}$  défini par

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} P_H \\ P_{45} \\ P_R \end{pmatrix} = \frac{1}{m_{00}} \begin{pmatrix} m_{10} \\ m_{20} \\ m_{30} \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

$P_H$ ,  $P_{45}$  et  $P_C$  représentent respectivement les degrés de polarisation horizontale, linéaire à 45° et circulaire obtenus pour une lumière incidente non polarisée. La polarisance est une caractéristique de l'élément optique représenté par  $M$ .

Le vecteur polarisation peut aussi être vu comme le vecteur de Stokes émergent moyen lorsque tous les états sur la sphère de Poincaré sont présents à l'incidence.

**Remarques**

- D'une manière générale, une matrice de Mueller  $M$  peut être partitionnée sous la forme :

$$M = \begin{bmatrix} m_{00} & \vec{D} \\ \vec{P} & m \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

- La matrice de Mueller  $M(\phi)$  d'un élément orienté d'un angle  $\phi$  est définie comme une rotation de la matrice de Mueller  $M = M(\phi = 0)$  par la relation suivante :

$$M(\phi) = Rot(-\phi)M(\phi = 0)Rot(\phi) \quad (1.46)$$

Où  $Rot(\phi)$  est la matrice de Mueller de la rotation :

$$Rot(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\phi) & -\sin(2\phi) & 0 \\ 0 & \sin(2\phi) & \cos(2\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

Il vient que les paramètres  $D$  et  $P$  définissant la diatténuation et la polarisation sont invariants par rotation, c'est-à-dire qu'ils sont indépendants de l'orientation de l'échantillon.

- Un diatténuateur caractérisé par son vecteur diatténuation  $\vec{D}$ , a une matrice de Mueller symétrique. Elle est donnée par :

$$M_D = m_{00} \begin{bmatrix} 1 & \vec{D}^t \\ \vec{D} & m_D \end{bmatrix}, m_D = \sqrt{1 - D^2}I + (1 - \sqrt{1 - D^2})\hat{D}\hat{D}^t \quad (1.48)$$

où  $I$  est la matrice identité  $3 \times 3$  et  $\hat{D} = \vec{D}/|\vec{D}|$

Un exemple d'élément diatténuateur est un polariseur partiel [45]. Il est caractérisé par sa matrice de Mueller de la forme  $M_D$  et son coefficient d'atténuation

$$\alpha = \frac{T_{min}}{T_{max}} \quad (1.49)$$

- Un polariseur idéal est également un élément diatténuateur. Il transmet intégralement la partie de l'onde parallèle à son axe propre et atténue complètement le reste. Un polariseur parfait peut être linéaire, circulaire ou elliptique selon que la lumière qu'il transmet d'une onde incidente non polarisée est linéaire, circulaire ou elliptique. La matrice de Mueller d'un polariseur elliptique d'ellipticité  $\varepsilon$ , d'azimut  $\phi$  et de coefficient de transmission  $\tau$  est donnée par :



$$M_D = \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} 1 & C_a C_e & S_a C_e & \pm S_e \\ C_a C_e & C_a^2 C_e^2 & C_a S_a C_e^2 & \pm C_a S_e C_e \\ S_a C_e & C_a S_a C_e^2 & S_a^2 C_e^2 & \pm S_a S_e C_e \\ \pm S_e & \pm C_a S_e C_e & \pm C_a S_e C_e & S_e^2 \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

où  $C_a = \cos(2\phi)$ ,  $S_a = \sin(2\phi)$ ,  $C_e = \cos(2\varepsilon)$  et  $S_e = \sin(2\varepsilon)$ . Il est clair que la diatténuation du polariseur parfait elliptique est égale à 1.

L'orientation de l'élément diatténuateur est égale à  $\tan(2\phi)$ .

### Déphasseur

Un élément optique déphaseur retarde la phase de ses états propres et garde constant l'intensité et le degré de polarisation de l'état incident polarisé [52]. Sa transmittance en intensité est indépendante de l'état incident. Un déphaseur a la même nature que ses états propres (linéaire, circulaire ou elliptique). Il est homogène ou non selon que ses états propres sont perpendiculaires ou non. On définit le retard produit par un déphaseur par [16] :

$$R = |\delta_q - \delta_r|, \quad 0 \leq R \leq \pi \quad (1.51)$$

où  $\delta_q$  et  $\delta_r$  sont les déphasages des états propres de polarisation.

La direction du déphasage, appelée aussi axe rapide, est définie comme l'état propre associé à la plus grande phase. Si on suppose que cet axe est caractérisé par le vecteur de Stokes  $(1, a_1, a_2, a_3)^t = (1, \hat{R}^t)^t$  avec  $|\hat{R}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$ . Le retard et l'axe rapide associé sont décrits par le vecteur retard  $\vec{R}$  :

$$\vec{R} = R\hat{R} = \begin{pmatrix} Ra_1 \\ Ra_2 \\ Ra_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_H \\ R_{45} \\ R_C \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

Les composantes de  $\vec{R}$  sont les retards horizontal, linéaire à  $45^\circ$  et circulaire. Le retard linéaire est donné par :

$$R_L = \sqrt{R_H^2 + R_{45}^2} \quad (1.53)$$

et le retard total :

$$R = \sqrt{R_H^2 + R_{45}^2 + R_C^2} = \sqrt{R_L^2 + R_C^2} = |\vec{R}| \quad (1.54)$$

Le déphaseur n'altère donc pas la norme d'un vecteur de Stokes incident mais son orientation. Il en résulte que l'action d'un élément déphaseur est équivalente à une rotation sur la sphère de Poincaré. Pellat Finet a montré que l'ensemble des déphaseurs est homéomorphe au groupe des rotations  $SO_3$  [27].

La matrice de Mueller d'un déphaseur a la forme générale suivante

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ 0 & m_R \end{pmatrix}, \quad (1.55)$$

$$(\hat{m}_R)_{ij} = \delta_{ij} \cos R + a_i a_j (1 - \cos R) + \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_k \sin R, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.56)$$

où  $\epsilon_{ijk}$  est le symbole de permutation de Levi-Civita et  $\delta_{ij}$  est l'indice de Kronecker.  $R$  est le retard et  $(1, a_1, a_2, a_3)^t = (1, \hat{R}^t)^t$  est l'axe rapide normalisé.  $m_R$  est la matrice de rotation dans  $\mathbb{R}^3$ .

Dans les équations (1.55) et (1.56) on suppose que la transmittance du déphaseur est égale à 1. Par conséquent, la matrice  $M_R$  possède trois degrés de liberté donnés par son vecteur retard  $\vec{R}$ . Les états propres du déphaseur sont respectivement l'axe rapide  $\hat{R}$  et lent  $(-\hat{R})$ , c'est-à-dire

$$M_R \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \hat{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \hat{R} \end{pmatrix}, m_R \hat{R} = \hat{R} \quad (1.57)$$

Inversement le retard et l'axe rapide d'une matrice de Mueller d'un déphaseur sont donnés par :

$$R = \cos^{-1} \left[ \frac{M_R}{2} - 1 \right], \quad (1.58)$$

$$a_1 = \frac{1}{2 \sin R} (m_R)_{23} - (m_R)_{32}$$

$$a_2 = \frac{1}{2 \sin R} (m_R)_{31} - (m_R)_{13} \quad (1.59)$$

$$a_3 = \frac{1}{2 \sin R} (m_R)_{12} - (m_R)_{21}$$

Un exemple d'un déphaseur élémentaire est le déphaseur elliptique. Si on note  $\Delta$  la différence de phase qu'il introduit entre ses états propres,  $\phi$  son azimuth et  $\epsilon$  son ellipticité, la matrice de Mueller du déphaseur elliptique est alors définie par la relation :

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (D^2 - E^2 - F^2 + G^2) & 2(DE + FG) & -2(DF + EG) \\ 0 & 2(DE - FG) & (-D^2 + E^2 - F^2 + G^2) & -2(DG - EF) \\ 0 & -2(DF - EG) & -2(DG - EF) & (-D^2 - E^2 + F^2 + G^2) \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

$$D = \cos(2\epsilon) \cos(2\phi) \sin(\Delta/2), \quad F = \sin(2\epsilon) \cos(2\phi) \sin(\Delta/2),$$

$$E = \cos(2\epsilon) \sin(2\phi) \sin(\Delta/2), \quad G = \cos(\Delta/2),$$

L'orientation de l'axe rapide du déphaseur est donnée par la valeur  $a_2/a_3 = \tan(2\phi)$

Les vecteurs diatténuation et retard sont des vecteurs de Stokes normalisés. Ils peuvent donc être représentés sur la sphère de Poincaré. Les diatténuateurs et les déphaseurs appartiennent au groupe des éléments polarimétriques homogènes (état propres orthogonaux). Les matrices de Mueller correspondantes sont aussi dites homogènes[52]. Un diatténuateur est un élément optique homogène avec un retard nul. Un déphaseur est un élément optique

homogène avec une diatténuation nulle. En général, un élément optique homogène peut avoir une diatténuation et un retard. En conclusion, si  $M$  est la matrice de Mueller d'un élément non dépolarisant, il existe un diatténuateur  $M_D$  et un déphaseur  $M_R$  tel que

$$M = M_R M_D \quad (1.61)$$

Comme vu précédemment,  $M_D$  peut être obtenue à partir de la première ligne de  $M$ . Si  $M_D$  est non singulière,  $M_R$  est alors déterminée par la relation :

$$M_R = M M_D^{-1} \quad (1.62)$$

Le vecteur retard est calculé à partir des équations (1.58) et (1.59). Dans le cas des systèmes non dépolarisants, les vecteurs diatténuation et retard caractérisent entièrement les propriétés polarimétriques du système. La matrice de Mueller correspondante s'écrit

$$M = m_{00} \begin{pmatrix} 1 & \vec{D}^t \\ \vec{P} & m \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

$\vec{D}$  et  $\vec{P}$  sont respectivement les vecteurs diatténuation et polarisance de  $M$ . On vérifie aisément que

$$m = m_R m_D \quad (1.64)$$

Ainsi

$$m_R = \frac{1}{\sqrt{1-D^2}} [m - (1 - \sqrt{1-D^2}) \vec{P} \vec{D}^t]. \quad (1.65)$$

L'équation suivante fournit une relation entre la polarisance et la diatténuation pour les systèmes non-dépolarisants :

$$\vec{P} = m_R \vec{D} \quad (1.66)$$

Il en résulte qu'un élément non-dépolarisant de matrice de Mueller  $M$  doit satisfaire à la relation ci-dessous :

$$m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2 = m_{10}^2 + m_{20}^2 + m_{30}^2 \quad (1.67)$$

### Décomposition des matrices de Mueller dépolarisantes

Un dépolariseur est un élément optique avec une diatténuation et un retard nuls [15]. Il est caractérisé par la matrice de Mueller suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}, |a|, |b|, |c| \leq 1 \quad (1.68)$$

On définit le facteur de dépolarisation moyen par :

$$\Delta = 1 - \frac{|a| + |b| + |c|}{3} \quad (1.69)$$

Ce paramètre caractérise le pouvoir dépolarisant du dépolariseur, il varie entre 0 et 1. Par ailleurs, un dépolariseur peut admettre une polarisation  $P_\Delta$ , et ses axes de dépolarisation orthogonaux peuvent avoir des orientations différentes que ceux des axes  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  sur la sphère de Poincaré.

La forme générale de sa matrice de Mueller s'écrit alors :

$$M_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{P}_\Delta & m_\Delta \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

La matrice  $m_\Delta$  est symétrique. Le vecteur  $\vec{P}_\Delta$  détermine la polarisation du dépolariseur. Il est égal à zéro pour un dépolariseur pur et non nul pour un dépolariseur possédant certaines capacités de polarisation. Ce dépolariseur a 9 degrés de liberté et a une diatténuation et un retard nuls. Les valeurs propres de  $m_\Delta$  présentent les coefficients de dépolarisation du dépolariseur.

Soit  $M$  la matrice de Mueller d'un élément optique dépolarisant. La matrice diatténuation  $M_D$  attachée à l'élément optique se calcule de la même manière que pour les éléments non-dépolarisants (équation (1.48)). En effet  $M_D$  est entièrement déterminée par la première ligne de la matrice  $M$ . Supposons la matrice  $M_D$  non singulière. On définit la matrice auxiliaire  $M'$  comme :

$$M' = MM_D^{-1} \quad (1.71)$$

Notons que  $M'$  est dépourvu de diatténuation. Cependant,  $M'$  n'est pas un pur déphaseur comme dans le cas non-dépolarisant, elle admet aussi un pouvoir dépolarisant.  $M'$  peut donc être considérée comme un déphaseur suivi d'un dépolariseur :

$$M_\Delta M_R = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{P}_\Delta & m_\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{0} & m_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{P}_\Delta & m_\Delta m_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{P}_\Delta & m' \end{bmatrix} = M' \quad (1.72)$$

où  $m'$  est la sous matrice  $3 \times 3$  de  $M'$ . On veut montrer que la matrice de Mueller  $M$  peut se décomposer comme un produit d'un diatténuateur  $M_D$  suivi d'un déphaseur  $M_R$  suivi d'un dépolariseur  $M_\Delta$  [52] :

$$M = M_\Delta M_R M_D \quad (1.73)$$

Ces trois facteurs produisent la diatténuation, le retard et la dépolarisation de l'élément optique représenté par  $M$ .

L'équation (1.73) est la décomposition polaire des matrices de Mueller dépolarisantes [52], [9].

Les équations (1.71) et (1.72) montrent que

$$\vec{P}_\Delta = \frac{\vec{P} - m\vec{D}}{1 - D^2}, \quad (1.74)$$

$$m' = m_\Delta m_R \quad (1.75)$$

Il reste maintenant à trouver les éléments de la matrice  $m'$ . Notons  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  les valeurs propres de  $m'(m')^t$ . L'équation (1.75) indique que  $m_\Delta$  a  $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}$  et  $\sqrt{\lambda_3}$  comme valeurs propres. La matrice  $m_\Delta$  peut être obtenue par la relation :

$$m_\Delta = \text{sign}(\det(m')) [m'(m')^t + (\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + \sqrt{\lambda_2 \lambda_3} + \sqrt{\lambda_1 \lambda_3}) I]^{-1} \times [(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3}) m'(m')^t + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} I]. \quad (1.76)$$

La matrice  $M_\Delta$  est finalement déterminée en utilisant les équations (1.74) et (1.76).  $M_R$  peut être obtenue par la relation suivante :

$$M_R = M_\Delta^{-1} M' \quad (1.77)$$

Si la matrice  $m_\Delta$  est singulière,  $M_R$  ne sera pas unique [52].

Le pouvoir dépolarisant de la matrice  $M_\Delta$  est donné par :

$$\Delta = 1 - \frac{\text{trace}(|M_\Delta - 1|)}{3} \quad (1.78)$$

Ce facteur est entre 0 et 1. Plus il se rapproche de 1 plus le pouvoir dépolarisant de l'élément optique représenté par  $M$  est grand.

### Remarques

1. La multiplication matricielle n'est pas commutative. Les matrices de Mueller du dépolariseur et du diatténuateur présentées dans l'équation (1.73) dépendent donc de l'ordre de multiplication. Avec trois facteurs matriciels, six arrangements différents sont possibles [52]. Le premier est présenté ci-dessus et les cinq autres sont donnés par les relations :

$$M = M_{\Delta 2} M_{D 2} M_{R 2}, \quad (1.79)$$

$$M = M_{R 3} M_{D 3} M_{\Delta 3}, \quad (1.80)$$

$$M = M_{D 4} M_{R 4} M_{\Delta 4}, \quad (1.81)$$

$$M = M_{R 5} M_{\Delta 5} M_{D 5}, \quad (1.82)$$

$$M = M_{\Delta 6} M_{D 6} M_{R 6}, \quad (1.83)$$

Il est important de faire la séparation entre les éléments non dépolarisants et l'élément dépolarisant. D'autre part, il est utile que l'élément dépolarisant suive l'élément non-dépolarisant car dans ce cas on saurait que la diminution du degré de polarisation d'une onde totalement polarisée à l'incidence est causée en dernier par le dépolariseur. Ceci réduit le choix à l'équation (1.79). la comparaison de cette expression avec celle obtenue dans l'équation (1.73) donne :

$$M_{\Delta 2} = M_\Delta, \quad M_{R 2} = M_R \quad M_{D 2} = M_R M_D M_R^t \quad (1.84)$$

Le déphaseur et le dépolariseur restent inchangés par rapport aux facteurs de l'équation (1.73). Le diatténuateur est obtenu par une transformation de similarité.

2. La décomposition polaire de la matrice de Mueller est très utile dans l'analyse et l'interprétation des propriétés physiques en imagerie polarimétrique par prévisualisation couleur. Ce point sera étudié en détail dans le chapitre 4. De plus c'est un moyen qui permet la représentation des matrices de Mueller non dépolarisantes par des quaternions (section suivante).
3. Diana M. Hayes [36] a souligné dans son article que la décomposition de Lu et Chipman n'est valable que pour des matrices de Mueller à faible pouvoir dépolarisant. Ceci est dû à la propagation des erreurs expérimentales. Elle a montré que quand la dépolarisation est élevée, les erreurs dans le calcul du retard et de la dépolarisation sont également élevées. En effet la relation (1.76) n'est valable que si les valeurs propres de la matrice  $m_{\Delta}$  ont le même signe, ce qui n'est pas le cas si les effets de dépolarisation sont importants.

## 1.4 Récapitulatif

Nous avons présenté succinctement les outils classiques pour décrire la polarisation d'une onde lumineuse ainsi que son interaction avec les systèmes optiques : le formalisme de Jones et le formalisme de Stokes-Mueller. Le formalisme de Stokes-Mueller s'avère le plus complet et le plus général. Par ailleurs, nous avons rappelé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice de Mueller soit physiquement réalisable ou pour qu'une matrice de Mueller soit déduite d'une matrice de Jones. Nous avons également rappelé la décomposition polaire d'une matrice de Mueller arbitraire. Dans ce qui suit, nous nous concentrons sur le côté algébrique pour caractériser les opérateurs optiques et proposer l'ébauche d'une nouvelle approche pour la représentation quaternionique des matrices de Mueller non-dépolarisantes vues comme des opérateurs géométriques sur la sphère de Poincaré.

## 1.5 Algèbre et formalisme de polarisation

### 1.5.1 Introduction à l'algèbre géométrique

L'algèbre géométrique est un moyen élégant et simple pour représenter des concepts géométriques complexes [66]. Elle inclut toutes les théories existantes tels que les nombres complexes, les quaternions, les matrices algébriques, etc. L'algèbre géométrique permet d'unifier et de simplifier la géométrie dans un langage mathématique efficace sans cas spéciaux. En quelques mots, l'algèbre géométrique sert à traduire simplement les transformations géométriques complexes dans un langage algébrique clair et concis. L'application de l'algèbre géométrique à la polarisation est possible grâce à l'équivalence entre les vecteurs de Stokes et les quaternions qui sont des rotateurs (spineurs) de l'algèbre géométrique. Cela nous permet de montrer qu'un opérateur de Mueller est localement une similitude, et qu'un déphaseur n'est autre qu'un quaternion réel qui effectue une rotation de la sphère de Poincaré. En conséquence, nous démontrons qu'il est possible de représenter l'ensemble des matrices de Mueller non dépolarisantes par des quaternions complexes.

## 1.5.2 Bivecteur, Trivecteur et Multivecteur

### Bivecteur et produit extérieur

Dans un espace vectoriel  $E$ , l'algèbre géométrique introduit un nouveau produit : le produit extérieur noté  $\wedge$ . Si le produit scalaire projette un vecteur sur un autre pour donner un scalaire, le produit extérieur prolonge un vecteur le long d'un autre vecteur. Soit  $a$  et  $b$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . Le produit extérieur  $a \wedge b$  est schématisé par la figure ci-dessous (figure (1.4)) [66].

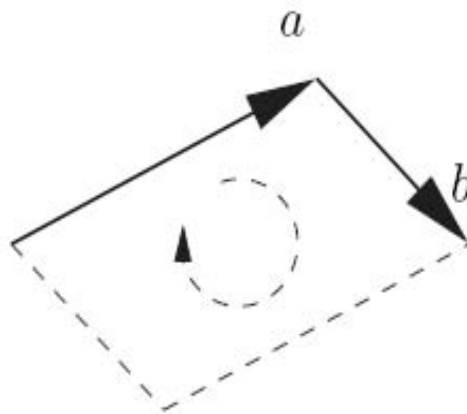


FIG. 1.4 – Le vecteur  $a$  prolongé sur le vecteur  $b$

Si on considère qu'un scalaire est un sous espace de dimension 0 et qu'un vecteur est un sous espace de dimension 1 alors le résultat du produit extérieur des vecteurs  $a$  et  $b$  est un sous espace de dimension 2 appelé *Bivecteur*. Par conséquent, un bivecteur est une surface orientée de la même façon qu'un vecteur est un chemin orienté. Le produit extérieur de  $b \wedge a$  est un bivecteur de même surface que  $a \wedge b$  mais d'orientation opposée. Il en résulte que le produit extérieur est anti-commutatif.

### Propriétés

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois vecteurs de  $E$ , et  $\lambda$  un scalaire de  $\mathbb{C}$

- $a \wedge b = -b \wedge a$  (anti-commutative)
- $a \wedge a = 0$  (surface null)
- $(\lambda a) \wedge b = \lambda(a \wedge b)$
- $\lambda(a \wedge b) = (a \wedge b)\lambda$
- $a \wedge (b + c) = (a \wedge b) + (a \wedge c)$

Si  $a$  est un  $n$ -vecteur, alors  $a$  s'écrit comme une combinaison linéaire dans la base vectorielle  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Ceci nous permet d'écrire  $a$  dans n'importe quelle dimension.

Dans  $\mathbb{R}^2$  par exemple  $a = (x, y)$ , dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $a = (x, y, z)$ . D'une manière similaire, un bivecteur peut être exprimé comme une combinaison linéaire dans la base des bivecteurs. Si on se place dans le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ , deux vecteurs  $a$  et  $b$  de cet espace s'écrivent comme

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

Le produit extérieur de  $a$  et  $b$  en utilisant les propriétés du produit extérieur est défini par :

$$a \wedge b = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \wedge (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = (\alpha_1 \beta_2) e_1 \wedge e_2 + (\alpha_2 \beta_1) e_2 \wedge e_1 \quad (1.85)$$

On posant  $I = e_1 \wedge e_2 = e_{12}$  alors  $I$  représente la base du bivecteur dans  $\mathbb{R}^2$  et le produit extérieur de  $a$  et  $b$  devient :

$$a \wedge b = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) I \quad (1.86)$$

Dans  $\mathbb{R}^3$  un bivecteur nécessite une base à trois éléments. En effet si  $a$  et  $b$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , alors

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

et

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$$

En utilisant le fait que pour  $i \neq j$  on a :

$$e_i \wedge e_i = 0,$$

$$e_i \wedge e_j = e_{ij},$$

$$e_j \wedge e_i = -e_{ij}$$

Le produit extérieur de  $a$  et  $b$  est le bivecteur :

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_1 \wedge e_2 + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) e_1 \wedge e_3 + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) e_2 \wedge e_3 \\ &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_{12} + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) e_{13} + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) e_{23} \end{aligned} \quad (1.87)$$

Il en résulte que  $e_{12}$ ,  $e_{13}$  et  $e_{23}$  est la base des bivecteurs dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans  $\mathbb{R}^3$ , le produit extérieur se comporte comme le produit vectoriel. En réalité ils sont fondamentalement différents : le produit vectoriel ne concerne que l'espace à trois dimensions tandis que le produit extérieur est général à toutes les dimensions.



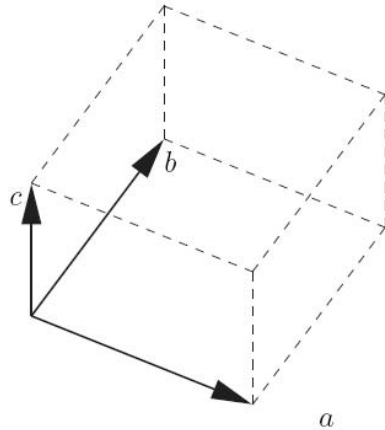


FIG. 1.5 – Le bivecteur  $a \wedge b$  étendu sur le vecteur  $c$  : trivecteur

### Trivecteur

L'extension d'un vecteur sur un autre donne une surface orientée qui est un sous espace de dimension 2 appelé bivecteur. De même, l'extension d'un bivecteur tout au long d'un vecteur est un volume orienté appelé *Trivecteur*. Un trivecteur est donc un sous espace de dimension trois. Il admet une base ayant un seul élément dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  qui est  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_{123}$  noté parfois  $I$ . Si  $a, b$  et  $c$  sont trois vecteurs de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , le trivecteur  $(a \wedge b) \wedge c$  est illustré dans la figure(1.5).

Si  $a, b$  et  $c$  sont trois vecteurs du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ , le produit extérieur  $(a \wedge b) \wedge c = 0$ . Ce résultat est évident, car il n'existe pas de sous-espace de dimension 3 dans l'espace  $\mathbb{R}^2$ . Dans l'espace  $\mathbb{R}^4$  la base du trivecteur est formée par les éléments :  $e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}$ , et par conséquent un trivecteur arbitraire dans  $\mathbb{R}^4$  sera une combinaison linéaire de ces 4 éléments.

### Remarques

- Un scalaire, un vecteur, un bivecteur et un trivecteur sont respectivement des sous espaces de dimensions 0, 1, 2 et 3. On appelle un sous espace de dimension  $k$  quelconque (en particulier supérieur à 3), une  $k$  – *blade*. Un trivecteur, par exemple, est également appelé une 3 – *blade*.
- Dans  $\mathbb{R}^3$ , le produit extérieur de trois vecteurs est exactement le produit vectoriel de ces mêmes vecteurs. La différence entre les deux produits est que le produit vectoriel s'applique uniquement en dimension 3, tant que le produit extérieur est général à n'importe quelle dimension supérieure à 3.
- La base d'une  $k$  – *blade* dans un espace  $\mathbb{R}^n$  possède  $n!/(n-k)!k!$  éléments. Ainsi, une base d'une 3 – *blade* dans  $\mathbb{R}^4$  a 4 éléments ( $e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}$ ) et une base d'une 4 – *blade* dans  $\mathbb{R}^4$  a un seul élément égal à  $e_{1234}$ .
- Une  $k$  – *blade* dans  $\mathbb{R}^{k-1}$  est évidemment égale à 0.

## Multivecteur

Un multivecteur est une combinaison linéaire de différentes  $k$  – blades. Dans  $\mathbb{R}^2$  un multivecteur comporte trois parties : un scalaire, un vecteur et un bivecteur :

$$\underbrace{\alpha_1}_{\text{partie scalaire}} + \underbrace{\alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_2}_{\text{partie vecteur}} + \underbrace{\alpha_4 I}_{\text{partie bivecteur}} \quad (1.88)$$

Les  $\alpha_i$  sont des scalaires qui peuvent être nuls appelés composantes du multivecteur. Ainsi l'espace  $\mathbb{R}^2$  donne lieu à une algèbre géométrique appelée  $\mathcal{Cl}_2$ . La base de  $\mathcal{Cl}_2$  est donc formée par les éléments  $1, e_1, e_2, I$ . Dans  $\mathbb{R}^3$  un multivecteur a 8 composantes et s'écrit sous la forme suivante :

$$\underbrace{\alpha_1}_{\text{partie scalaire}} + \underbrace{\alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_2 + \alpha_4 e_3}_{\text{partie vecteur}} + \underbrace{\alpha_5 e_{12} + \alpha_6 e_{13} + \alpha_7 e_{23}}_{\text{partie bivecteur}} + \underbrace{\alpha_8 e_{123}}_{\text{partie trivecteur}} \quad (1.89)$$

La base de  $\mathcal{Cl}_3$  contient  $1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}$ .

En général l'espace  $\mathbb{R}^n$  génère le sous-espace de base notée  $\mathcal{Cl}_n$ . Il n'y a pas de représentation graphique d'un multivecteur. En effet, il n'y'a pas moyen de visualiser un scalaire ajouté à une surface.

### 1.5.3 Produit géométrique

Le produit géométrique de deux vecteurs est défini comme une combinaison linéaire du produit scalaire des deux vecteurs et de leur produit extérieur. Si  $a$  et  $b$  sont deux vecteurs, leurs produit géométrique est défini de la manière suivante :

$$ab = a \cdot b + a \wedge b \quad (1.90)$$

Le produit géométrique des éléments de la base orthonormale  $e_1, e_2, \dots, e_n$  donne pour  $i \neq j$  :

$$\begin{aligned} e_i e_i &= e_i \cdot e_i + e_i \wedge e_i = e_i \cdot e_i = 1 \\ e_i e_j &= e_i \cdot e_j + e_i \wedge e_j = e_i \wedge e_j = e_{ij} \\ e_i e_j &= -e_j e_i \end{aligned}$$

$$II = e_{12} e_{12} = e_1 e_2 e_1 e_2 = -e_1 e_1 e_2 e_2 = -1$$

Pour le produit géométrique entre les éléments de  $\mathcal{Cl}_3$ , on a le tableau suivant :

	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{23}$	$e_{123}$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{23}$	$e_{123}$
$e_1$	$e_1$	1	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_2$	$e_3$	$e_{123}$	$e_{23}$
$e_2$	$e_2$	$-e_{12}$	1	$e_{23}$	$-e_1$	$-e_2$	$e_{12}$	$-e_{13}$
$e_3$	$e_3$	$-e_{13}$	$-e_{23}$	1	$e_{123}$	$-e_1$	$-e_2$	$e_{12}$
$e_{12}$	$e_{12}$	$-e_2$	$e_1$	$e_{123}$	-1	$-e_{23}$	$e_{13}$	$-e_3$
$e_{13}$	$e_{13}$	$-e_3$	$-e_{123}$	$e_1$	$e_{23}$	-1	$-e_{12}$	$e_2$
$e_{23}$	$e_{23}$	$e_{123}$	$-e_3$	$e_2$	$-e_{13}$	$e_{12}$	-1	$-e_1$
$e_{123}$	$e_{123}$	$e_{23}$	$-e_{13}$	$e_{12}$	$-e_3$	$e_2$	$-e_1$	-1

Un autre exemple du produit géométrique de deux vecteurs est les nombres complexes. Le nombre complexe  $5 + 7i$  est un multivecteur, sa composante scalaire est égale à 5, sa composante vectorielle est nulle et sa composante bivecteur est égale à 7. La base du bivecteur est le complexe  $i$  par analogie à la base bivecteur  $I = e_{12}$ . On a  $i^2 = -1$  et on a également  $I^2 = II = -1$

### Produit géométrique généralisé

Le produit géométrique généralisé opère sur les multivecteurs. Il possède les propriétés suivantes :

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois multivecteurs et  $\lambda$  un scalaire :

- $(AB)C = A(BC)$  (associativité)
- $\lambda A = A\lambda$  (commutativité pour la multiplication par un scalaire)
- $A(B + C) = AB + AC$  (distributivité)

Le produit géométrique n'est ni commutatif ni anticommutatif puisqu'il est composé du produit scalaire commutatif et du produit extérieur anticommutatif.

Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{Cl}_2$ , alors :

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_2 + \alpha_4 I$$

$$B = \beta_1 + \beta_2 e_1 + \beta_3 e_2 + \beta_4 I$$

en utilisant les propriétés du produit géométrique citées ci-dessus, le produit de  $A$  et  $B$  est égal à :

$$\begin{aligned} AB &= (\alpha_1 + \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_2 + \alpha_4 I)B \\ &= \alpha_1 B + \alpha_2 e_1 B + \alpha_3 e_2 B + \alpha_4 I B \\ &= \alpha_1(\beta_1 + \beta_2 e_1 + \beta_3 e_2 + \beta_4 I) \\ &\quad + \alpha_2 e_1(\beta_1 + \beta_2 e_1 + \beta_3 e_2 + \beta_4 I) \\ &\quad + \alpha_3 e_2(\beta_1 + \beta_2 e_1 + \beta_3 e_2 + \beta_4 I) \\ &\quad + \alpha_4 e_3(\beta_1 + \beta_2 e_1 + \beta_3 e_2 + \beta_4 I) \end{aligned}$$

Il vient d'après le tableau :

$$\begin{aligned} AB &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 - \alpha_4 \beta_4 \\ &\quad + (\alpha_4 \beta_3 - \alpha_3 \beta_4 + \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_1 \\ &\quad + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_4 \beta_2 + \alpha_2 \beta_4 + \alpha_3 \beta_1) e_2 \\ &\quad + (\alpha_4 \beta_1 + \alpha_1 \beta_4 + \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) I \end{aligned}$$

## 1.5.4 Applications

### Rotations

Soit le vecteur  $a' = \alpha'_2 e_1 + \alpha'_3 e_2$  image du vecteur  $a = \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_2$  par une rotation d'angle  $\theta$ . Ces deux vecteurs sont reliés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha'_2 &= \cos(\theta)\alpha_2 - \sin(\theta)\alpha_3 \\ \alpha'_3 &= \sin(\theta)\alpha_2 + \cos(\theta)\alpha_3\end{aligned}\quad (1.91)$$

Autrement dit, on utilise la relation matricielle  $a' = Ra$  avec

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\quad (1.92)$$

En passant à l'algèbre géométrique, regardons l'effet de la multiplication du vecteur  $a$  par le nombre complexe  $B = \beta_1 + \beta_4 I$  :

$$a'' = aB = (\alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_2)(\beta_1 + \beta_4 I) = (\beta_1 \alpha_2 - \beta_4 \alpha_3) e_1 + (\beta_4 \alpha_2 + \beta_1 \alpha_3) e_2\quad (1.93)$$

On voit bien que le produit géométrique d'un vecteur par un complexe est un vecteur dont les deux composantes sont données par :

$$\begin{aligned}\alpha''_2 &= \beta_1 \alpha_2 - \beta_4 \alpha_3 \\ \alpha''_3 &= \beta_4 \alpha_2 + \beta_1 \alpha_3\end{aligned}\quad (1.94)$$

En identifiant l'équation (1.91) avec l'équation (1.94), on obtient  $\beta_1 = \cos(\theta)$  et  $\beta_4 = \sin(\theta)$ . Par conséquent on peut utiliser un nombre complexe pour effectuer une rotation. Dorénavant,  $B$  sera appelé *Spineur*. En général les Spineurs sont des rotateurs  $n$ -dimensionnels.

Le fait que  $\beta_1 = \cos(\theta)$  et  $\beta_4 = \sin(\theta)$  n'est pas le résultat d'une simple comparaison avec l'équation (1.91), mais vient du fait qu'un bivecteur est le produit géométrique de deux vecteurs. Si  $p$  et  $q$  sont les vecteurs concernés alors :

$$B = pq = p \cdot q + p \wedge q\quad (1.95)$$

On sait que le produit scalaire de deux vecteurs unitaire est le cosinus de l'angle qui les séparent, et le module du produit croisé des deux vecteurs est le sinus du même angle, c'est-à-dire  $p \cdot q = \cos(\theta)$  et  $|p \times q| = \sin(\theta)$ . D'un autre côté le produit extérieur est défini aussi comme le module du produit croisé multiplié par la surface formée par les deux vecteurs unitaires, nous avons donc  $p \wedge q = \sin(\theta)I$ . On en déduit que :

$$B = pq = \cos(\theta) + \sin(\theta)I$$

Il en résulte que dans  $\mathcal{Cl}_2$  un Spineur est la combinaison linéaire d'un scalaire et d'un bivecteur. De plus la composition de deux spineurs ou plus de  $\mathcal{Cl}_2$  est un autre spineur dans  $\mathcal{Cl}_2$

Intéressons-nous aux rotations d'ordre supérieur c'est-à-dire à l'action des spineurs dans l'espace euclidien.

Il est prouvé que pour un angle  $\theta$  et un bivecteur  $A$  le spineur

$$R = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)A \quad (1.96)$$

effectue la rotation d'un vecteur  $v$  par rapport à la surface  $A$  (plan de rotation) par la relation suivante [66] :

$$v' = R^\dagger v R \quad (1.97)$$

où  $R^\dagger$  est l'inverse du spineur  $R$  défini par  $\cos(\frac{\theta}{2}) - \sin(\frac{\theta}{2})A$ . En général si  $R = pq$  alors  $R^\dagger = qp$ . La rotation est effectuée autour du vecteur normal à la surface  $A$

Avec le spineur  $R$ , on peut effectuer la rotation d'un vecteur, d'un bivecteur, d'un trivecteur, ou d'un multivecteur, ce qui n'est pas évident sans l'aide de l'algèbre géométrique. Par exemple, la rotation d'un bivecteur  $B$  d'un angle  $\theta$  autour d'un axe  $a$  normal à une surface  $A$  se fait par la relation :

$$B' = R^\dagger B R = (\cos(\frac{\theta}{2}) - \sin(\frac{\theta}{2})A)B(\cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2})A) \quad (1.98)$$

Un traitement plus approfondi peut être trouvé dans [66]. Revenons au cas qui nous intéresse. Rappelons-nous de la forme d'un bivecteur dans  $\mathcal{Cl}_3$ . Il est caractérisé par la base  $e_{12}, e_{13}, e_{23}$  et par ses trois composantes  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ . Si  $B$  est unitaire (sinon on le normalise pour avoir un bivecteur unitaire) et  $\gamma$  un scalaire, alors on peut représenter le spineur  $R$  comme suit :

$$R = \underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{(\gamma)} + \underbrace{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)B}_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)} \quad (1.99)$$

Dans le cas tridimensionnel un spineur a donc 4 composantes. Si on identifie  $e_{12}, e_{13}, e_{23}$  à  $i, j, k$ , alors d'après le tableau des produits géométriques on a :

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1, \\ ij = k, ji &= -k, ki = j, ik = -j, jk = i, kj = -i \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire un spineur dans  $\mathcal{Cl}_3$  comme :

$$R = (w, xi, yj, zk) \quad (1.100)$$

avec

$$w = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$x = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\beta_1$$

$$y = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\beta_2$$

$$z = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\beta_3$$

c'est un opérateur de rotation d'angle  $\theta$  autour d'un axe de composantes  $(x, y, z)$ .

## Similitude

Une similitude est une rotation suivie d'une homothétie. Elle est caractérisée par un angle de rotation, un axe de rotation et un rapport d'homothétie. Dans le cas normal, l'homothétie de même origine, cas qui nous intéresse, est caractérisée par un scalaire  $h$  strictement positif. Il est entre 0 et 1 s'il s'agit d'une contraction et supérieur à 1 s'il s'agit d'un prolongement. En algèbre géométrique, la similitude n'est autre que le produit géométrique de la racine carrée de  $h$  et du Spineur  $R$ . Dans  $\mathcal{Cl}_3$  par exemple, la similitude, d'angle  $\theta$ , d'axe de rotation  $(x, y, z)$  et de rapport d'homothétie  $h$  est définie par l'opérateur [66] :

$$S = (\sqrt{h}w, \sqrt{h}xi, \sqrt{h}yj, \sqrt{h}zk) \quad (1.101)$$

L'application d'une similitude à un multivecteur  $B$  se traduit par la relation :

$$B' = S^\dagger B S \quad (1.102)$$

Où  $S^\dagger$  est l'inverse de  $S$  (voir annexe A)

## Un quaternion est un scalaire plus un bivecteur

Un quaternion est un hypercomplexe ayant la forme suivante [35] :

$$q = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \quad (1.103)$$

Il peut être vu comme un multivecteur à quatre composantes, la première composante  $\alpha_0$  est un scalaire et les trois autres forment un plan bivecteur relatif à la rotation. Les composantes du quaternion sont en général réelles, mais peuvent aussi être complexes (*dans*  $\mathbb{C}$ ). Dans ce cas on parle de quaternions complexes.

Un quaternion est considéré comme un spineur. Si on effectue le produit géométrique de deux spineurs, le résultat est exactement le même que si on multiplie deux quaternions. Enfin, l'inverse d'un spineur  $(w, x, y, z)$  est le spineur  $(w, -x, -y, -z)$  ce qui vient du fait que l'inverse effectue une rotation d'angle opposé et que  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$  et  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ . Un spineur peut donc être représenté par un quaternion en 3D, mais à la différence d'un quaternion, un spineur s'étend à n'importe quelle dimension.

### Remarque

L'inverse d'un quaternion complexe  $q = (w, x, y, z)$  avec  $(w, x, y, z \in \mathbb{C})$  est le quaternion  $q^\dagger = (\bar{w}, -\bar{x}, -\bar{y}, -\bar{z})$ , où  $\bar{x}$  représente le complexe conjugué de  $x$ .

## 1.5.5 Application à la polarisation

### Représentation des vecteurs de Stokes

La représentation de Stokes est exactement analogue à un multivecteur de  $\mathcal{Cl}_3$  dont les composantes vectorielle et trivectorielle sont nulles. C'est-à-dire qu'un tel vecteur est un

multivecteur à 4 composantes réelles. La première composante  $S_0$  est associée à la partie scalaire, et les trois autres composantes  $S_1, S_2$  et  $S_3$  forment un bivecteur de  $\mathbb{R}^3$  [55], [66] :

$$S = S_0 + S_1 e_{12} + S_2 e_{13} + S_3 e_{23} \quad (1.104)$$

Par conséquent, un vecteur de Stokes peut être représenté par un quaternion réel. Le contraire n'est pas toujours vrai à cause des considérations physiques imposées sur un vecteur de Stokes. Essayons de voir dans quelles conditions on peut représenter un opérateur de polarisation par un multivecteur ou plus généralement par un quaternion (réel ou complexe).

### Représentation des matrices de Mueller

Une matrice de Mueller a 16 degrés de libertés, un multivecteur n'en a que quatre. Il n'est donc pas possible de représenter une matrice de Mueller générale par un multivecteur ou même par un quaternion complexe à 8 degrés de libertés. Comme pour la rotation et la similitude, si un système optique représentée par la matrice de Mueller  $M$  admettait son équivalent en multivecteur  $R$ , alors son action sur un vecteur de Stokes serait exactement le produit géométrique de ce multivecteur par le vecteur de Stokes suivi par l'inverse de  $R$  c'est-à-dire

$$M.S = R^\dagger S R \quad (1.105)$$

L'inconnu dans cette équation est le multivecteur  $R$ . Ce système comporte 16 équations et quatre inconnus. Dans ce cas, soit le système n'admet pas de solution, ou il admet une unique solution. Par ailleurs, les éléments de la matrice de Mueller ayant un nombre de degrés de libertés inférieur à 8 sont reliés entre eux. Dans ce cas, cette représentation est alors possible. L'analyse de la solution de ce système est explicitée dans l'annexe B. La résolution du système de l'équation (1.105) dans l'ensemble des multivecteurs de  $\mathcal{Cl}_3$  n'a de solution que si la matrice de Mueller est de la forme suivante :

$$M = \begin{bmatrix} m_{00} & \vec{0}^t \\ \vec{0} & m \end{bmatrix} \quad (1.106)$$

où  $m = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$  est une matrice  $3 \times 3$  et  $\vec{0}$  est le vecteur nul  $3 \times 1$ . Les éléments

de la matrice  $M$  ne sont pas indépendants (voir l'annexe B pour plus de détails). L'unique matrice de Mueller ayant ces propriétés est la matrice de Mueller d'un déphaseur  $M_R$ . Par conséquent, la matrice de Mueller d'un déphaseur  $M_R$  peut être représentée par un multivecteur de  $\mathcal{Cl}_3$  à quatre composantes (un scalaire et un bivecteur de  $\mathbb{R}^3$ ). Les coefficients du multivecteur  $R = (a_0, a_1, a_2, a_3)$  qui est solution du système de l'équation

(1.105) se calculent en fonction des éléments de  $M = M_R$  par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{m_{00} + m_{11} + m_{22} + m_{33}} \\
 a_1 &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{m_{00} + m_{11} - m_{22} - m_{33}} \\
 a_2 &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{m_{00} - m_{11} + m_{22} - m_{33}} \\
 a_3 &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{m_{00} - m_{11} - m_{22} + m_{33}}
 \end{aligned}
 \tag{1.107}$$

Cette représentation nous montre que l'ensemble des déphaseurs est équivalent au groupe des rotations dans  $\mathbb{R}^3$  [67]. En effet le multivecteur  $R$  ainsi défini est un spineur dans  $\mathbb{R}^3$ , et donc la matrice de Mueller d'un déphaseur ne déforme pas la sphère de Poincaré. Elle lui applique une rotation d'angle  $\theta = 2 \arccos(a_0)$  autour d'un axe dont les angles sphériques sont définis par

$$longitude = \arccos(a_3/a_2)$$

et

$$latitude = \operatorname{arccotg}(a_1/(a_3 \cdot \arccos(a_3/a_2)))$$

L'action d'une matrice de Mueller  $M$  d'un déphaseur sur un vecteur de Stokes  $S$  incident se traduit donc par la relation :

$$M_R \cdot S = R^\dagger S R \tag{1.108}$$

### Remarque

Supposons que  $R_1$  soit le multivecteur représentatif d'une matrice de Mueller  $M_1$  et  $R_2$  le multivecteur représentatif d'une autre matrice de Mueller  $M_2$ . La matrice  $M_1 M_2$  est représentée par le produit géométrique des deux multivecteurs  $R_1$  et  $R_2$  qui reste un multivecteur.

Une matrice de Mueller  $M$  s'écrit comme le produit de trois matrices : un diatténuateur  $M_D$ , un déphaseur  $M_R$  et un dépolariseur  $M_\Delta$ . La matrice  $M_R$  a été représentée par le spineur  $R$  dans l'équation (1.107). Il reste donc à trouver s'il existe des multivecteurs associés à  $M_D$  et  $M_\Delta$ .

La matrice  $M_D$  a la forme décrite dans (1.48) :

$$M_D = m_{00} \begin{bmatrix} 1 & \vec{D}^t \\ \vec{D} & m_D \end{bmatrix} \tag{1.109}$$

Le système de l'équation (1.105) n'admet pas de solution dans l'ensemble des multivecteurs, en particulier des quaternions réels, pour la matrice  $M_D$ . L'ensemble de solutions doit donc s'élargir aux quaternions complexes. Dans ce cas, le système de l'équation (1.105) devient

$$M_D \cdot S = q^\dagger S q \tag{1.110}$$



avec  $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ , ( $q_i \in \mathbb{C}$ ). Ce système admet une solution unique (voir annexe B) définie par le quaternion :

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{M_D^{00} + M_D^{11} + M_D^{22} + M_D^{33}} \\
 q_1 &= \pm \frac{i}{2} \sqrt{M_D^{00} + M_D^{11} - M_D^{22} - M_D^{33}} \\
 q_2 &= \pm \frac{i}{2} \sqrt{M_D^{00} - M_D^{11} + M_D^{22} - M_D^{33}} \\
 q_3 &= \pm \frac{i}{2} \sqrt{M_D^{00} - M_D^{11} - M_D^{22} + M_D^{33}}
 \end{aligned} \tag{1.111}$$

Le vecteur de Stokes résultant sera complexe. On doit sommer sa partie réelle et imaginaire pour avoir le même résultat que si on effectue la multiplication  $M_D.S$  (voir annexe B).

Le produit géométrique du multivecteur  $R$  et du quaternion complexe  $q$  représente alors les matrices de Mueller de la forme  $M_R M_D$  qui forment l'ensemble des matrices de Mueller non-dépolarisantes. Ceci est en parfait accord avec l'étude effectuée par Pellat Finet [55].

Une matrice de Mueller arbitraire a aussi une partie dépolarisante représentée par  $M_\Delta$  ayant la forme (équation (1.70)) :

$$M_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{P}_\Delta & m_\Delta \end{bmatrix} \tag{1.112}$$

Aucun des deux systèmes précédents ne fournit de solution dans le cas d'un dépolariseur. Si on admet qu'une solution existe, on doit le montrer pour la matrice de Mueller d'un dépolariseur pur [52] :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \tag{1.113}$$

Dans le cas de cette matrice, aucune solution n'est possible.

Par conséquent, seules les matrices de Mueller non-dépolarisantes admettent leurs équivalents en quaternions. Ceci se déduit aussi du nombre de degrés de liberté de ces matrices.

En conclusion, une matrice de Mueller est localement une similitude, car elle applique à un vecteur de Stokes incident une homothétie de rapport  $h$  qui est égale au degré de polarisation de l'onde émergente divisé par celui de l'onde incidente et une rotation d'angle  $\theta$  qui est l'angle qui sépare le vecteur de Stokes incident du vecteur émergent. Cependant cette similitude n'est pas globale car la matrice de Mueller ne se comporte pas de la même manière pour tous les points de la sphère de Poincaré, excepté le cas d'un déphaseur.

## 1.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les outils mathématiques nécessaires pour la suite du travail. Dans la première partie, nous avons décrit les différents formalismes de

polarisation, plus particulièrement le formalisme de Stokes-Mueller. Comme l'ensemble des matrices de Mueller ne forment pas un espace vectoriel, il est difficile de définir une distance ou une mesure de similitude entre deux matrices de Mueller différentes. Cette notion est cependant essentielle pour développer des algorithmes de classification pour les images de Mueller. Pour cela, on a proposé un nouveau formalisme basé sur l'algèbre géométrique et les quaternions. Nous avons montré que les matrices de Mueller non-dépolarisantes peuvent être décrites par des quaternions complexes et en particulier que les déphaseurs sont considérés comme des rotateurs. En revanche, cette représentation n'est pas possible dans le cas des matrices dépolarisantes. La représentation des matrices non-dépolarisantes par des quaternions sera très utilisée par la suite pour la segmentation des images polarimétriques de Mueller en utilisant la distance définie sur le groupe des quaternions.



# Chapitre 2

## Imagerie polarimétrique

### 2.1 Introduction

L'imagerie polarimétrique permet d'accéder aux propriétés physiques et géométriques des objets à partir de leurs propriétés polarimétriques (biréfringence, dichroïsme, dépolarisation). Ainsi, les imageurs polarimétriques sont développés pour différents domaines applicatifs tels que : la métrologie, l'imagerie médicale et biologique ainsi que la télédétection [53], [12], [78], [13].

La construction des systèmes imageurs qui mesurent l'état de polarisation est essentiellement basée sur une bonne configuration de l'analyseur de l'état de polarisation (PSA) qui permet de mesurer le vecteur de Stokes attaché à chaque pixel de l'image. Traditionnellement, ceci est assuré en effectuant des rotations à des éléments optiques biréfringents (lame quart d'onde) ou des modulateurs à cristaux liquides variables placés en face d'un polariseur fixe. Si en plus, on peut contrôler l'état de polarisation de la lumière incidente à travers un générateur d'état de polarisation (PSG), le système permet l'acquisition de la matrice de Mueller attachée à chaque pixel de l'image [15]. Quelque soit le principe de modulation utilisé dans la configuration du PSG/PSA, le principe de mesure reste le même. En effet, le PSG génère quatre états de polarisation qui illuminent la scène et le PSA analyse le vecteur de Stokes résultant en mesurant ses projections sur au moins quatre états de polarisation indépendants. L'ensemble des 16 mesures produit un système matriciel qui relie la matrice de Mueller de l'échantillon  $M$  à la matrice des intensités  $I$  mesurées par la caméra et ceci pour chaque pixel.

Comme tous les systèmes d'imagerie, l'imagerie polarimétrique est sujette à des erreurs systématiques ainsi qu'aux bruits aléatoires [32]. Ce qui peut aboutir à des grandeurs polarimétriques mesurées non admissibles physiquement.

Les erreurs déterministes ou systématiques sont dues aux perturbations dans la configuration du système PSG/PSA, tandis que les bruits aléatoires sont inhérents aux dispositifs imageurs (bruit photonique, bruit thermique, bruit de quantification, etc)[77]. Pour cela, une procédure d'étalonnage efficace doit être mise en place pour minimiser conjointement les bruits aléatoires ainsi que les erreurs systématiques afin d'extraire proprement la matrice de Mueller associée à chaque pixel. Il est montré dans la littérature ([63], [23] et [70])

polariseur linéaire orienté à $0^\circ$	polariseur linéaire orienté à $0^\circ$
$\frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
polariseur linéaire d'azimut $\phi$	polariseur circulaire
$\frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} 1 & C & S & 0 \\ C & C^2 & CS & 0 \\ S & CS & S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$C = \cos 2\phi, S = \sin 2\phi$	

TAB. 2.1 – Matrices de Mueller de différents types de polariseurs

que la qualité des mesures est strictement liée au conditionnement des matrices de modulation du PSG/PSA. Cependant, il est nécessaire de développer davantage ces résultats pour une mise en œuvre efficace de cette modalité d'imagerie.

## 2.2 Les composants optiques polarimétriques

### 2.2.1 Diatténuateurs

Un diatténuateur [15] est un élément optique homogène, non-dépolarisant. Il modifie uniquement l'amplitude du champ électrique. Sa transmission en intensité dépend de l'état de polarisation incident. Les polariseurs sont un exemple de diatténuateurs [45]. On distingue les polariseurs parfaits, les polariseurs partiels et les polariseurs dépolarisants.

#### Polariseur parfait

Un polariseur parfait est un diatténuateur ayant un retard nul et ne présentant aucune dépolarisation [15]. Il transmet une lumière totalement polarisée indépendamment de l'état incident. Un polariseur parfait peut être linéaire, circulaire ou elliptique suivant que l'état émergent est linéaire, circulaire ou elliptique. La matrice de Mueller générale d'un polariseur elliptique est présentée dans l'équation (1.50) du chapitre 1. Les matrices de Mueller des polariseurs linéaire et circulaire ayant un coefficient de transmission  $\tau$  sont résumées dans le tableau(2.1).

Un polariseur linéaire dit aussi analyseur, ne laisse passer que la lumière linéairement polarisée suivant une direction appelée l'axe du polariseur [15]. L'onde émergente a une intensité égale à  $I_0 \cos(\theta)$ , où  $I_0$  est l'intensité de l'onde incidente et  $\theta$  est l'angle formé entre la direction de la polarisation incidente et l'axe de l'analyseur. Une onde linéairement polarisée perpendiculaire à cette direction ne peut donc pas passer à travers l'analyseur.

### Polariseur partiel

La matrice de Mueller  $M_D$  d'un polariseur partiel a la forme suivante (équation (1.48)) :

$$M_D = m_{00} \begin{bmatrix} 1 & \vec{D}^t \\ \vec{D} & m_D \end{bmatrix}, m_D = \sqrt{1 - D^2}I + (1 - \sqrt{1 - D^2})\hat{D}\hat{D}^t \quad (2.1)$$

Le coefficient d'atténuation d'un polariseur partiel est défini par le rapport

$$\alpha = \frac{T_{min}}{T_{max}} \quad (2.2)$$

où  $T_{min}$  (respectivement  $T_{max}$ ) est le rapport de l'intensité transmise et incidente quand la lumière incidente est linéairement polarisée suivant la direction qui minimise (respectivement maximise) l'intensité transmise. Le coefficient de polarisation partiel  $\psi$  est défini par

$$\cos 2\psi = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}, \quad \sin 2\psi = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1} \quad (2.3)$$

Ce coefficient varie entre  $0^\circ$  (polariseur parfait à  $90^\circ$ ) et  $90^\circ$  (polariseur parfait à  $0^\circ$ )

La matrice de Mueller d'un polariseur partiel peut aussi être écrite en fonction du coefficient de polarisation comme suit :

$$\frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\cos 2\psi & 0 & 0 \\ -\cos 2\psi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 2\psi \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

### Polariseur dépolarisant

Un polariseur dépolarisant [45] peut augmenter le degré de polarisation d'une onde non polarisée et diminuer celui d'une onde totalement polarisée.

#### 2.2.2 Déphaseurs

Un déphaseur [15] est un élément optique, non-dépolarisant ayant un pouvoir rotatoire sur les polarisations incidentes. Il change uniquement la phase des composantes du champ électrique (états propres). Sa transmittance en intensité est constante et indépendante de la polarisation incidente. Selon que ses états propres sont linéaires, circulaires ou elliptiques, un déphaseur est dit linéaire, circulaire ou elliptique [39]. Les déphaseurs sont des éléments biréfringents et anisotropes. Ils sont caractérisés par l'orientation de leur axe rapide  $\theta$  et par leur retard  $\delta$ .

Les lames à retard sont des exemples de déphaseurs. Une lame biréfringente est une quart d'onde si  $\delta = \frac{\pi}{2}$  et une demi onde si  $\delta = \pi$ . On cite dans le tableau(2.2) quelques matrices de Mueller de déphaseurs.

Déphaseur linéaire d'axe rapide $0^\circ$ et de retard $\delta$	Déphaseur linéaire d'axe rapide $45^\circ$ et de retard $\delta$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & 0 & -\sin \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix}$
Déphaseur linéaire d'axe rapide $\theta$ et de retard $\delta$	Déphaseur circulaire
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 + B^2C & AB(1 - C) & -BD \\ 0 & AB(1 - C) & B^2 + A^2C & AD \\ 0 & B^2D & -AD & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ 0 & -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A = \cos 2\theta; B = \sin 2\theta; C = \cos \delta; D = \sin \delta$	

TAB. 2.2 – Matrices de Mueller de différents types de déphaseurs

## 2.3 Principe de la mesure

Pour comprendre le principe de la mesure, observons le schéma fonctionnel de la figure (2.1).

Soit  $S_e = [1 \ -1 \ 0 \ 0]^t$  le vecteur de Stokes à l'entrée du système polariseur tel que l'axe rapide de la lame  $L_1$  fasse un angle  $\theta$  avec l'axe vertical; à la sortie du système polariseur, le vecteur de Stokes normalisé, incident sur la surface étudiée est donné par [15] :

$$\begin{aligned}
 S_i = [L_1][P_1]S_e &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta & \frac{1}{2} \sin 4\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \frac{1}{2} \sin 4\theta & \sin^2 2\theta & \cos 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\cos^2 2\theta_i \\ -\frac{1}{2} \sin 4\theta_i \\ -\sin 2\theta_i \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Soit

$$M(\omega_0, \omega_i, \lambda) = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

la matrice de Mueller, inconnue, de l'échantillon pour la longueur d'onde  $\lambda$  et les directions d'incidence et d'observation définies par les angles solides  $\omega_0$  et  $\omega_i$ . La radiance renvoyée par  $M$  vers le détecteur, est donnée par le vecteur de Stokes  $MS_i$ . Ce vecteur

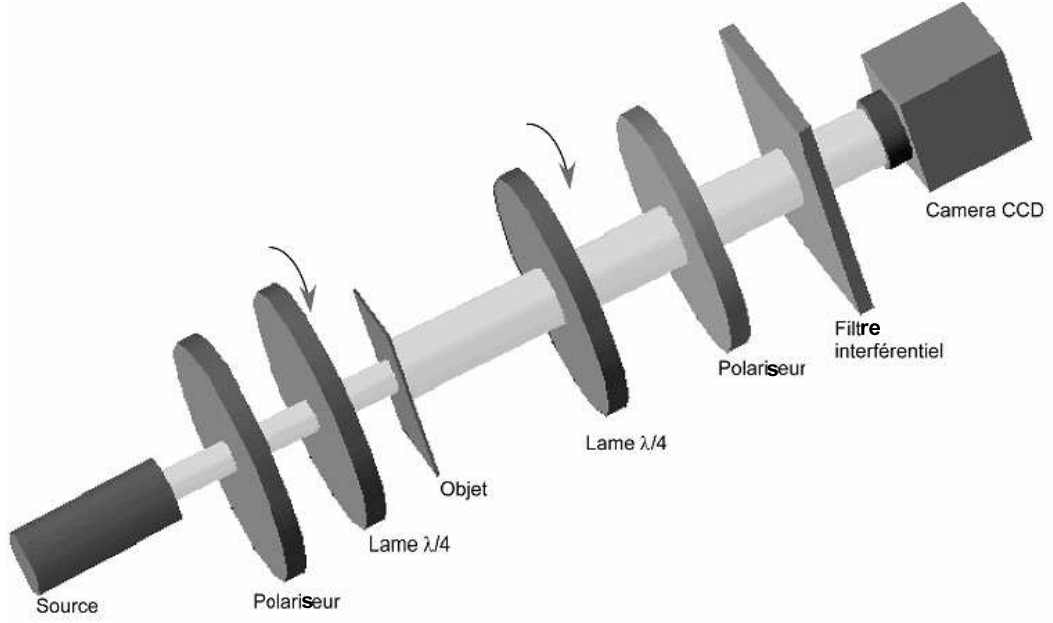


FIG. 2.1 – Principe d'un polarimètre en transmission.

passe à travers le système d'analyse ; si l'axe rapide de la lame  $L_2$  fait un angle  $\theta'$  avec la direction verticale, la matrice de Mueller du système analyseur sera donnée par :

$$\begin{aligned}
 [P_2][L_2] &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta' & \frac{1}{2} \sin 4\theta' & -\sin 2\theta' \\ 0 & \frac{1}{2} \sin 4\theta' & \sin^2 2\theta' & \cos 2\theta' \\ 0 & \sin 2\theta' & -\cos 2\theta' & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -\cos^2 2\theta' & -\frac{1}{2} \sin 4\theta' & \sin^2 2\theta' \\ -1 & \cos^2 2\theta' & \frac{1}{2} \sin 4\theta' & -\sin^2 2\theta' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

On conclut donc que l'intensité au niveau du détecteur sera proportionnelle au produit suivant :

$$I(\theta, \theta') = c \cdot a^t M p \tag{2.8}$$

où  $a^t$  et  $p$  sont les vecteurs

$$a^t = \left[ 1 \quad -\cos^2 2\theta' \quad -\frac{1}{2} \sin 4\theta' \quad \sin 2\theta' \right] \tag{2.9}$$

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ -\cos^2 2\theta \\ -\frac{1}{2} \sin 4\theta \\ -\sin 2\theta \end{bmatrix} \tag{2.10}$$



et  $c$  est un coefficient lié aux pertes d'intensités sur le trajet et dans les divers éléments optiques. Ceci montre que l'intensité mesurée est bien proportionnelle aux éléments de la matrice  $M$ .

L'équation (2.8) contient seize inconnues qui sont les éléments de la matrice  $M$ . En donnant  $N$  positions angulaires à la lame  $L_1$  et  $R$  positions angulaires à la lame  $L_2$ , nous obtiendrons un système de  $N \times R$  équations à 16 inconnues qui peut être résolu par inversion matricielle pour  $N = R = 4$  ou par la méthode des moindres carrés pour  $N, R > 4$  en calculant les pseudo-inverses des matrices  $A$  et  $P$  (Eq. (2.12)). Bien entendu,  $N \times R$  doit être supérieur ou égal à 16 pour que le système soit solvable. En omettant le coefficient  $c$ , le système s'écrit alors sous la forme matricielle suivante

$$I = AMP = \begin{bmatrix} a_1^t \\ a_2^t \\ \vdots \\ a_N^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_R \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

La solution de ce système sera donnée par :

$$\begin{aligned} M &= A^{-1}IP^{-1} && \text{pour} && N = R = 4 \\ M &= A^\#IP^\# && \text{pour} && N, R > 4 \end{aligned} \quad (2.12)$$

où  $\#$  est la pseudo-inverse au sens des moindres carrés de Moore-Penrose ( $A^\# = (A^t A)^{-1} A^t$ ).

### Remarques

1. L'image de Mueller est définie comme la mesure des matrices de Mueller attachées à chaque pixel [29], [56].
2. Le principe de mesure d'une *image de Stokes* [34] est similaire à celui de l'image de Mueller. Le PSG reste fixe dans ce cas, et la mesure se fait pour au moins 4 positions angulaire du PSA.
3. Le nombre minimum de mesures est de 4 pour l'imagerie de Stokes et de 16 pour l'imagerie de Mueller. Il a été prouvé dans [34] que plus le nombre de mesures est grand, moins importantes sont les erreurs de mesure. En revanche, l'estimation des erreurs dans ce cas, devient plus compliquée.

## 2.4 Optimisation du système

### 2.4.1 Cas de l'imagerie de Stokes

Pour un imageur de Stokes, seul l'état de polarisation de la lumière provenant de la scène est acquis. Cela se fait en insérant un analyseur d'état de polarisation complet devant

la caméra. Au moins quatre états d'analyse sont nécessaires pour mesurer les éléments de Stokes pour chaque pixel. Formellement, cela se résume par l'équation suivante :

$$I = A(\eta)S \quad (2.13)$$

où  $I$  est le vecteur d'intensité mesuré,  $A$  est la matrice du PSA qui dépend d'un vecteur de paramètres  $\eta$ , tandis que  $S$  est le vecteur de Stokes à estimer [77].

Pour un polarimètre utilisant une lame quart d'onde mobile en rotation,  $\eta$  a comme composantes : le retard de la lame quart d'onde, les angles de rotation  $\theta_i$  et l'orientation du polariseur.

### Erreurs systématiques

Supposons que le vecteur  $\eta$  dévie d'une quantité  $d\eta$  de sa valeur nominale  $\eta_0$ . L'équation (2.13) devient :

$$I = A(\eta_0 + d\eta)\hat{S} = \hat{A}\hat{S} \quad (2.14)$$

Quelque soit le principe de modulation utilisé, les éléments de la matrice  $A$  sont des fonctions  $n$  fois dérivables.

En considérant  $\|d\eta\| \ll \|\eta_0\|$ , qui est pratiquement vérifié après la procédure d'étalonnage, nous pouvons effectuer un développement de Taylor de  $A(\eta_0 + d\eta)$  autour de  $\eta_0$  pour obtenir :

$$\hat{A} = A(\eta_0 + d\eta) \simeq A(\eta_0) + \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} \cdot d\eta = A + \Delta A \quad (2.15)$$

Le vecteur de Stokes estimé  $\hat{S}$  est donc

$$\hat{S} = (A + \Delta A)^{-1}I \quad (2.16)$$

Pour évaluer l'erreur commise sur le vecteur de Stokes mesuré on doit d'abord calculer l'erreur sur les matrices de modulation. On démontre que [37] :

$$A^{-1} - \hat{A}^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (A^{-1} \Delta A)^k A^{-1} \quad (2.17)$$

Le vecteur  $\eta$  est choisi de sorte que  $A$  soit inversible. Comme  $\|d\eta\| \ll \|\eta_0\|$ , on peut supposer que  $\hat{A}$  reste également inversible. Si de plus  $\|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1$  alors (voir annexe B) :

$$\frac{\|A^{-1} - \hat{A}^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \quad (2.18)$$

$\|*\|$  désigne la norme euclidienne, et  $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$  est le conditionnement de la matrice  $A$  [61].

A partir de l'équation (2.18) et comme  $S = A^{-1}I$  et  $\hat{S} = \hat{A}^{-1}I$ , il vient :

$$\frac{\|S - \hat{S}\|}{\|S\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \quad (2.19)$$

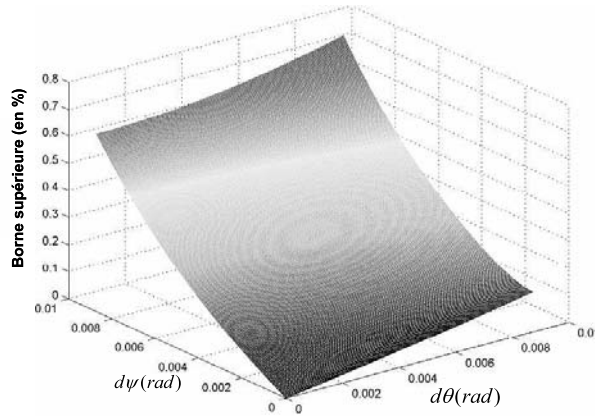


FIG. 2.2 – Allure de la borne supérieure de l’erreur relative du vecteur de Stokes pour  $\theta = [15.12^\circ, 51.69^\circ, 308.31^\circ, 344.88^\circ]$

La borne supérieure de l’équation (2.19) dépend du conditionnement de la matrice de modulation  $A$ . Si  $A$  est une matrice bien conditionnée, le vecteur de Stokes mesuré en présence d’erreurs systématiques sera relativement proche du vecteur de Stokes réel [63]. D’où la nécessité de chercher le vecteur  $\eta$  qui minimise  $\kappa(A)$ .

Dans le cas d’un polarimètre à lame quart-d’onde, un choix d’optimisation est celui de minimiser le déterminant de  $A$  pour assurer son inversion. Les paramètres ainsi obtenus (angles de rotation) sont  $\theta = [15.12^\circ, 51.69^\circ, 308.31^\circ, 344.88^\circ]$ . La borne supérieure de l’erreur pour cette configuration en fonction des décalages  $d\theta$  des angles de rotation et  $d\psi$  du retard de la lame ( $0^\circ \leq d\theta, d\psi \leq 5^\circ$ ) est donnée en figure(2.2).

Si on remplace le déterminant de  $A$  par  $\kappa(A)$  comme fonction objective à minimiser, on obtient  $\theta^* = [193.23^\circ, 230.85^\circ, 127.98^\circ, 344.88^\circ]$ . La borne supérieure de l’erreur pour cette configuration en fonction des mêmes décalages est donnée en figure(2.3)

On constate une légère amélioration pour le deuxième jeu d’angles.

Par ailleurs, les erreurs systématiques ne sont pas les seules à perturber les mesures. On est également en présence d’erreurs aléatoires qui brulent les intensités mesurées. Il est donc important de tenir compte de ces erreurs.

### Erreurs en présence du bruit de la caméra

Si en plus on prend en compte le bruit de l’image, l’équation (2.16) devient :

$$\hat{S} = (A + \Delta A)^{-1}(I + \delta I) \quad (2.20)$$

Où  $\delta I$  représente le bruit aléatoire sur l’intensité mesurée  $I$ . Sous les mêmes conditions que précédemment, la borne supérieure de l’erreur relative en présence du bruit de mesure est donnée par [77] :

$$\frac{\|S - \hat{S}\|}{\|S\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta I\|}{\|I\|} \right) \quad (2.21)$$

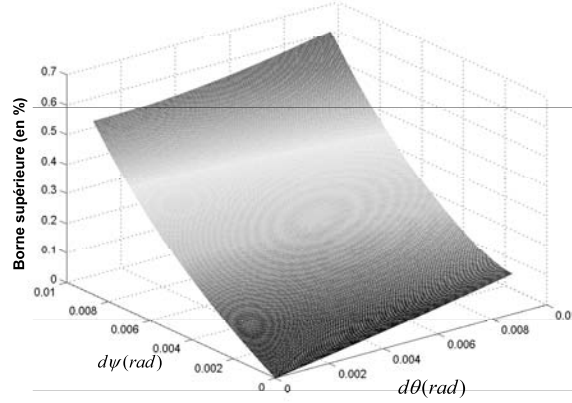


FIG. 2.3 – Allure de la borne supérieure de l’erreur relative du vecteur de Stokes pour  $\theta = [193.23^\circ, 230.85^\circ, 127.98^\circ, 344.88^\circ]$

L’équation (2.21) montre que cette borne est la somme de deux termes distincts. Le premier est dû aux erreurs systématiques du système, tandis que le deuxième est causé par le bruit de l’image. Il faut donc optimiser le conditionnement de la matrice  $A$  en cherchant l’argument  $\eta$  qui minimise ce conditionnement et maximise conjointement le rapport signal sur bruit SNR de l’image. Un compromis entre ces deux conditions doit être trouvé pour le choix optimal de  $\eta$ .

## 2.4.2 Analyse des erreurs de mesure en imagerie de Mueller

En imagerie de Mueller, la matrice de Mueller recherchée est reliée aux mesures d’intensité par l’équation matricielle suivante :

$$I = A(\eta)MP(\eta') \quad (2.22)$$

où  $P$  et  $A$  sont les matrices de modulation respectives du PSG et du PSA.  $\eta$  et  $\eta'$  sont les vecteurs de paramètres reliés aux matrices de modulation.

L’équation (2.22) peut s’écrire sous la forme suivante [77] :

$$\underline{I} = W(\eta'')\underline{M} \quad (2.23)$$

où  $\underline{M}$  et  $\underline{I}$  sont respectivement le vecteur de Mueller et le vecteur des intensités. Ils s’obtiennent par la mise en colonnes des matrices  $M$  et  $I$ . Ainsi, l’opérateur  $W$  est une matrice  $16 \times 16$  définie par

$$W = P^t \otimes A \quad (2.24)$$

où  $\otimes$  est le produit de Kronecker.

On se ramène à la même forme vectorielle qui gouverne l’imagerie de Stokes (équation (2.13)). Comme précédemment, si on prend en compte les déviations sur  $\eta''$  et le bruit additif sur les images, on obtient :

$$\hat{\underline{M}} = (W + \Delta W)^{-1}(\underline{I} + \delta \underline{I}) \quad (2.25)$$

où  $\Delta W$  est l'erreur systématique sur la matrice de modulation  $W$  et  $\delta \underline{I}$  représente le vecteur bruit aléatoire qui perturbe les mesures d'intensités. La borne supérieure de l'erreur relative sur le vecteur de Mueller mesuré est donnée par :

$$\frac{\|\underline{M} - \hat{\underline{M}}\|}{\|\underline{M}\|} \leq \frac{\kappa(W)}{1 - \kappa(W) \frac{\|\Delta W\|}{\|W\|}} \left( \frac{\|\Delta W\|}{\|W\|} + \frac{\|\delta \underline{I}\|}{\|\underline{I}\|} \right) \quad (2.26)$$

où  $\kappa(W)$  représente le conditionnement de la matrice  $W$ .

Dans le cas de la mesure du vecteur de Mueller, il est plus commode de faire apparaître les matrices de modulations  $P$  et  $A$  du PSG et du PSA dans le calcul de la borne supérieure. Ceci peut se faire en utilisant les propriétés du produit de Kronecker [15], [61]. En effet, le produit de Kronecker satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta(P^t \otimes A) = \Delta P^t \otimes A + \Delta A \otimes P^t, \\ \|\Delta W\| &\leq \|\Delta P\| \|A\| + \|\Delta A\| \|P\|, \\ \kappa(W) &= \kappa(P)\kappa(A) \end{aligned}$$

L'équation (2.26) s'écrit alors :

$$\frac{\|\underline{M} - \hat{\underline{M}}\|}{\|\underline{M}\|} \leq \frac{\kappa(P)\kappa(A)}{1 - \kappa(P)\kappa(A) \left( \frac{\|\Delta P\|}{\|P\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)} \left( \frac{\|\Delta P\|}{\|P\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta \underline{I}\|}{\|\underline{I}\|} \right) \quad (2.27)$$

De plus si on considère que le système est symétrique c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} \eta &= \eta', \\ \kappa(P) &= \kappa(A) = \kappa \end{aligned}$$

et

$$\frac{\|\Delta P\|}{\|P\|} = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \epsilon.$$

l'expression de la borne supérieure s'écrit [77] :

$$\frac{\|\Delta \underline{M}\|}{\|\underline{M}\|} \leq \frac{\kappa^2}{1 - 2\kappa^2\epsilon} \left( 2\epsilon + \frac{\|\delta \underline{I}\|}{\|\underline{I}\|} \right) \quad (2.28)$$

Il en résulte dans tous les cas que la borne supérieure de l'erreur relative est fonction des erreurs systématiques ainsi que du bruit sur les images intensités. Il est donc nécessaire de chercher l'argument de la matrice de modulation  $W$  qui à la fois minimise le conditionnement  $\kappa(W)$  et maximise le rapport signal à bruit.

Le terme erreur  $\delta I$  inclut plusieurs sources de bruits dues à l'utilisation d'un détecteur photosensible CCD. On cite entre autres le bruit thermique, le bruit de quantification, le

bruit de lecture et le bruit photonique [77]. Ces quantités sont en général dépendantes du détecteur utilisé. Leurs contributions ne sont pas prises en compte dans notre étude sauf le bruit de photons. La contribution de ce type de bruit à la borne supérieure peut être approximativement estimée en observant que pour chaque intensité mesurée  $I_i$  le terme  $\frac{\delta I_i}{I_i}$  est proportionnel à l'inverse de la racine carrée du nombre de photons détectés à la  $i^{me}$  mesure ( $n_i^{ph}$ ) :

$$\frac{\delta I_i}{I_i} \approx \frac{1}{\sqrt{n_i^{ph}}} \quad (2.29)$$

De plus, notons que ce nombre dépend principalement de l'efficacité quantique ( $Q_E$ ) du détecteur photosensible utilisé (caméra CCD) qui est fonction de la longueur d'onde. Cette dépendance peut être exprimée formellement par :

$$n_i^{ph}(\lambda) = Q_E(\lambda)N_i^{ph} \quad (2.30)$$

où  $N_i^{ph}$  est le nombre de photons atteignant le détecteur et  $\lambda$  la longueur d'onde.

Si on considère maintenant que les  $N$  mesures d'intensité contiennent approximativement la même quantité de bruit statistique, on pourra alors supposer que le nombre de photons  $n^{ph}(\lambda)$  qui contribue à chaque mesure est le même. C'est le cas de l'imagerie de Stokes sous illumination incohérente ou de l'imagerie de Mueller d'objets fortement dépolarisants. La contribution du bruit statistique est donnée alors par la formule suivante :

$$\frac{\|\delta I\|}{\|I\|} \approx \sqrt{\frac{1}{n^{ph}(\lambda)}} = \sqrt{\frac{1}{Q_E(\lambda)N^{ph}}} \quad (2.31)$$

Cette équation montre clairement que la contribution à la borne supérieure de l'erreur dépend de la longueur d'onde utilisée via les efficacités quantiques du détecteur. Cet aspect doit être considéré soigneusement quand il s'agit de l'imagerie à large bande ainsi que dans le cas d'un flux faible. Pour garder la borne supérieure de l'erreur relative aussi petite que possible, l'équation (2.31) nous suggère de choisir des détecteurs photosensibles ayant de fortes efficacités quantiques aux longueurs d'onde opérationnelles.

## 2.5 Discussion et analyse

La matrice de modulation  $A$  (ou dans le cas général  $W$ ) dépend d'un argument noté  $\eta$ . Notre objectif est de trouver le paramètre optimal  $\eta$  qui minimise la borne supérieure de l'erreur relative attachée aux paramètres de polarisation mesurés. Les équations (2.27) et (2.28) montrent que cette erreur est gouvernée par trois quantités, à savoir : les erreurs relatives du PSG et du PSA, le conditionnement des matrices de modulation et le bruit statistique qui affecte le signal mesuré. Ces trois quantités doivent être minimisées simultanément afin de réduire les incertitudes sur les mesures. Notons que les erreurs causées par les systèmes générateur et analyseur peuvent être contrôlées par un étalonnage soigné afin de minimiser l'impact des erreurs systématiques.

L'argument de la matrice de modulation  $\eta$  [61], [5], [6] doit être cherché de sorte à minimiser le conditionnement  $\kappa$ . Cependant, le bruit des images n'est pas indépendant de ce choix. En effet, le rapport signal à bruit  $SNR$  de l'image est relié au flux des photons qui est détecté par le photorécepteur de la caméra. On peut imaginer aisément la situation où l'état de polarisation de la lumière incidente sur l'analyseur est presque orthogonal à ce dernier, ce qui minimise l'intensité mesurée et augmente le bruit incident, et par conséquent réduit le rapport signal à bruit et donc augmente la borne supérieure de l'erreur relative.

Le rôle du PSA et du PSG est de créer une matrice de modulation  $W$  qui produit la polarisation appropriée à l'entrée et qui assure en même temps des modulations d'intensité efficaces au niveau du détecteur. En d'autres termes le générateur et l'analyseur doivent produire des intensités à larges variations d'amplitude durant les différentes mesures. Une mesure quantitative de cette propriété doit être introduite afin d'étudier cet aspect du problème.

### 2.5.1 Efficacité de modulation

Comme mentionné plus haut, les paramètres de polarisation  $(\underline{M}_i)_{i=1,N}$  (voir équation (2.23)) sont le résultat de  $N$  mesures indépendantes d'intensités  $(\underline{I}_i)_{i=1,N}$ . Il convient donc de supposer que ces quantités sont affectées par des bruits non corrélés  $\delta\underline{I}_i$ . Les paramètres de polarisation sont par conséquent perturbés par des erreurs  $\delta\underline{M}_i$  données par [24] :

$$\delta\underline{M}_i = \left[ \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial \underline{M}_i(\underline{I}_k)}{\partial \underline{I}_k} \right)^2 \delta \underline{I}_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

En inversant l'équation (2.23), on peut écrire :

$$\underline{M} = W^{-1} \underline{I} = Q \underline{I} = (q_{ij})_{i,j=1,N} \underline{I} \Rightarrow \underline{M}_i = \sum_{j=1}^N q_{ij} \underline{I}_j \quad (2.33)$$

On posant  $\Pi = \underline{M}$  dans le cas de Mueller et  $\Pi = S$  dans le cas de Stokes, l'équation (2.33) devient

$$\Pi = W^{-1} \underline{I} = Q \underline{I} = (q_{ij})_{i,j=1,N} \underline{I} \Rightarrow \pi_i = \sum_{j=1}^N q_{ij} \underline{I}_j \quad (2.34)$$

où  $\pi_i$  représentent les éléments du vecteur  $\Pi$ . On dit que les modulation sont efficaces, si chaque  $\underline{I}_i$  contient approximativement la même quantité de bruit aléatoire, c'est-à-dire, si pour tout  $i$  différent de  $k$  on a  $\delta \underline{I}_i = \delta \underline{I}_k = \delta \underline{I}$ . La dérivation de l'équation (2.34) donne

$$\frac{\partial \pi_i(\underline{I}_j)}{\partial \underline{I}_j} = q_{ij} \quad (2.35)$$

Par identification à l'équation (2.32) on a :

$$\delta\pi_i^2 = \delta\underline{I}^2 \sum_{j=1}^N q_{ij}^2 \quad (2.36)$$

On définit l'efficacité de modulation  $\xi_i$  correspondant à chaque  $\pi_i$  par le rapport

$$\xi_i = \frac{\delta\underline{I}}{\delta\pi_i} = \left( \sum_{j=1}^N q_{ij}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.37)$$

et le facteur d'efficacité moyen du système par

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \xi_i \right) \quad (2.38)$$

Il est clair que, pour qu'une mesure polarimétrique soit efficace, on doit choisir l'argument de la matrice de modulation qui maximise le facteur d'efficacité moyen ; ce qui mène à minimiser les vecteurs lignes de la matrice  $Q$ . Ceci est similaire à la minimisation de la norme  $\|Q\|$  qui est reliée à la minimisation du conditionnement de la matrice de modulation  $\kappa$  [77] :

$$\max_{\eta} \langle \xi \rangle \sim \min_{\eta} \|Q\| = \min_{\eta} \sqrt{\sum_k s_k^2} \quad (2.39)$$

où  $s_k$  sont les valeurs singulières de  $Q$ . Ces résultats sont similaires à ceux de Tyo [69]

## 2.5.2 Impact du bruit de l'image

Considérons maintenant une optimisation au sens de la minimisation du bruit statistique des mesures. Si on suppose l'absence d'erreurs systématiques et que les mesures ne sont atteintes que par le bruit de photons, l'équation (2.25) devient

$$\hat{\Pi} = Q(\underline{I} + \delta\underline{I}) = Q\underline{I} + Q\delta\underline{I} = \Pi + \delta\Pi \quad (2.40)$$

La matrice de covariance de l'erreur est donnée par

$$\langle \delta\Pi\delta\Pi^t \rangle = Q\langle \delta\underline{I}\delta\underline{I}^t \rangle Q^t \quad (2.41)$$

où  $\langle . \rangle$  est la moyenne d'ensemble.

Afin de réduire l'impact du bruit statistique, on minimise la norme  $\|Q\langle \delta\underline{I}\delta\underline{I}^t \rangle Q^t\|$ . Si on suppose de plus que les bruits sur les images intensités sont non corrélés, la matrice  $\langle \delta\underline{I}\delta\underline{I}^t \rangle$  devient diagonale. Si de plus, on suppose que les modulations de l'état de polarisation sont efficaces (la quantité de bruit dans les  $N$  mesures indépendantes est la même), la fonction objective à minimiser devient [77]



$$\chi = \|QQ^t\| = \sqrt{\sum_k s_k^4} \quad (2.42)$$

Les équations (2.39) et (2.42) montrent la relation existant entre les deux fonctions objectives  $\langle \xi \rangle$  et  $\chi$ .

## 2.6 Configuration optimale des polarimètres imageurs

### 2.6.1 Polarimètres à un déphaseur en rotation

Afin d'illustrer l'approche développée précédemment, nous allons considérer le cas d'un polarimètre de Stokes avec quatre mesures. Le système considéré comporte une lame biréfringente en rotation suivi d'un polariseur linéaire fixe. Dans ce qui suit, on supposera que le système est parfait c'est-à-dire sans erreurs systématiques. Nous chercherons le vecteur de paramètres qui optimise les fonctions objectives  $\langle \xi \rangle$ ,  $\chi$  et  $\kappa$ . La configuration optimale est obtenue en maximisant les efficacités de modulation  $\xi_i$  en fonction du retard  $\delta$  de la lame et des quatre positions angulaires  $(\theta_i)_{i=1,4}$ , c'est-à-dire :  $\eta = [\delta, (\theta_i)_{i=1,4}]$ . Le paramètre  $\eta$  optimal est obtenu pour un retard  $\delta = 132^\circ$  et des angles de rotations  $\theta_i = (\pm 15.12^\circ, \pm 51.7^\circ)$  ou  $\theta_i = (\pm 38.31^\circ, \pm 74.88^\circ)$ . Ceci est en parfait accord avec les résultats de Sabatke et al [59] et de Tyo [70]. Un tel système sera appelé «polarimètre optimal». La plupart des polarimètres utilisent des déphaseurs standards, en l'occurrence une lame quart d'onde ( $\delta = 90^\circ$ ).

Le tableau(2.3) fournit le résultat d'optimisation pour une lame quart d'onde en rotation pour les trois fonctions  $\kappa$ ,  $\chi$  et  $\langle \xi \rangle$ . La première colonne du tableau représente les angles optimaux. Les trois dernières colonnes donnent les valeurs finales des fonctions objectives.

	$\theta_i$	$\kappa$	$\chi$	$\langle \xi \rangle$
$\kappa$	$\{\pm 14.40^\circ, \pm 51.84^\circ\}$	6.42	3.23	1.058
$\chi$	$\{\pm 14.19^\circ, \pm 51.86^\circ\}$	6.42	3.23	1.057
$\langle \xi \rangle$	$\{\pm 14.58^\circ, \pm 50.92^\circ\}$	6.42	3.24	1.066

TAB. 2.3 – Configuration optimale du polarimètre à lame quart d'onde obtenu avec les trois fonctions  $\kappa, \chi$  et  $\langle \xi \rangle$

Le tableau (2.3) montre que les trois fonctions de mérite donnent des ensembles similaires pour les positions angulaires.

Ce résultat est illustré sur la figure (2.4), où on compare le comportement des trois fonctions objectives en fonction de l'angle  $\theta_4$  tout en gardant fixes les autres angles à  $\{-14.58^\circ, 14.58^\circ, -50.92^\circ\}$ . Notons que l'axe vertical du graphique est en échelle logarithmique. Le comportement du facteur d'efficacité moyen montre que des petites variations autour de la valeur optimale n'altèrent pas les performances générales du système.

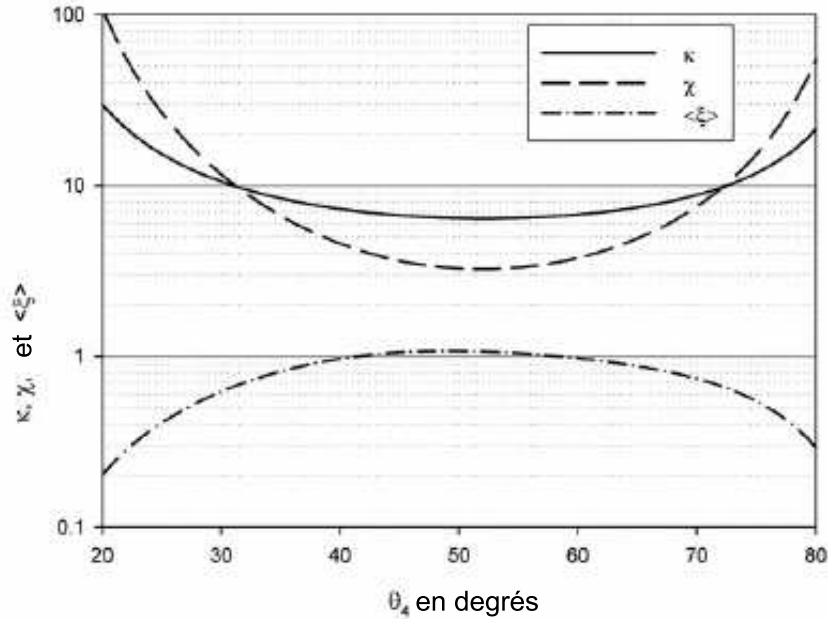


FIG. 2.4 – Les trois fonctions objectives en fonction de l'angle  $\theta_4$  dans le cas d'un polarimètre à lame quart d'onde.

Il est intéressant de comparer les propriétés d'un tel système à celles d'un polarimètre optimal. Le tableau (2.4) montre les efficacités de modulation  $\xi_i$  des polarimètres à lame quart d'onde et celles d'un polarimètre optimal. La fonction objective à optimiser est le facteur d'efficacité moyen. La 6<sup>me</sup> colonne du tableau donne le conditionnement des matrices de modulation de l'analyseur des deux polarimètres. On observe que le polarimètre optimal atteint des efficacités de modulation supérieures à 1 pour tous les canaux de Stokes. Ceci indique que le bruit de mesure est réduit et se propage d'une façon homogène aux canaux de Stokes mesurés  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ . Quant au polarimètre à lame quart d'onde, le tableau montre que le bruit est amplifié et affecte différemment chaque canal de Stokes mesuré. Par ailleurs, le polarimètre optimal produit le meilleur conditionnement qui minimise la borne supérieure de l'erreur relative du vecteur de Stokes mesuré.

	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\kappa$	$\chi$	$\langle \xi \rangle$
Polarimètre à lame quart d'onde	1.33	0.72	0.66	1.54	6.42	3.24	1.06
Polarimètre optimal	2.00	1.155	1.155	1.155	4.47	1.33	1.36

TAB. 2.4 – Efficacités de modulation et conditionnement correspondant au quatre mesures des paramètres de Stokes pour un polarimètre optimal et pour un polarimètre à lame quart d'onde. La fonction objective à optimiser est le facteur d'efficacité moyen

Les figures (2.5) et (2.6) montrent respectivement les efficacités de modulation cor-

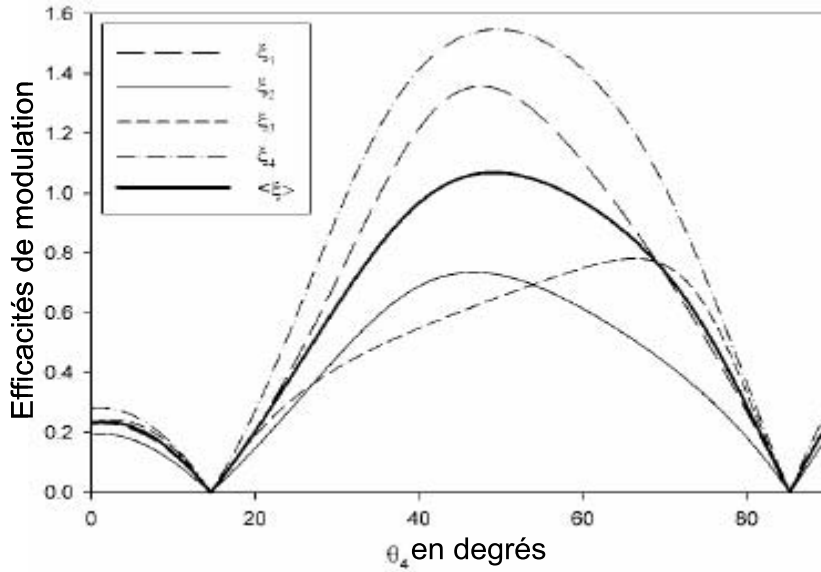


FIG. 2.5 – Les efficacités de modulation d’un polarimètre à lame quart d’onde en fonction de l’angle  $\theta_4$ .

respondant au polarimètre à lame quart d’onde et au polarimètre optimal en fonction de  $\theta_4$ . Les autres angles sont fixés à leurs valeurs optimales. Dans la configuration à lame quart d’onde (figure(2.5)), on observe que  $\theta_4$  ne présente aucun optimum évident. Le choix optimal est le simple résultat d’un compromis. Le canal  $S_3$  (voir  $\xi_4$  dans la figure (2.5)) est le plus robuste vis-à-vis du bruit, suivi par le canal intensité  $S_0$  (voir  $\xi_1$ ). Les canaux  $S_1$  et  $S_2$  sont les plus sensibles au bruit (voir  $\xi_2$  et  $\xi_3$ ).

Le comportement du système optimal (figure(2.6)) montre q’un choix optimal se situe autour de  $52^\circ$  pour  $\theta_4$  où  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  et  $\xi_3$  ont presque le même point d’intersection. On remarque également que le polarimètre optimal produit une efficacité de modulation  $\xi_4$  inférieure à celle du polarimètre à lame quart d’onde.

### 2.6.2 Polarimètres à deux déphaseurs en rotation

Dans le but d’améliorer les efficacités de modulation du polarimètre à lame quart d’onde, on introduit un déphaseur en rotation supplémentaire dans le polarimètre [77]. Il s’agit d’une lame quart d’onde ou demi-onde en plus de la lame quart d’onde déjà existante. Afin de garder le nombre de mesures égal à quatre, nous imposons 2 positions angulaires à chaque lame du système c’est-à-dire deux angles  $(\alpha_1, \alpha_2)$  pour la première lame et deux autres angles  $(\beta_1, \beta_2)$  pour la seconde lame. La figure (2.7) montre le schéma de la configuration proposée.

Le tableau (2.5) résume les résultats optimaux obtenus pour un tel système en maximisant les efficacités de modulation. On observe que l’ajout d’un deuxième déphaseur

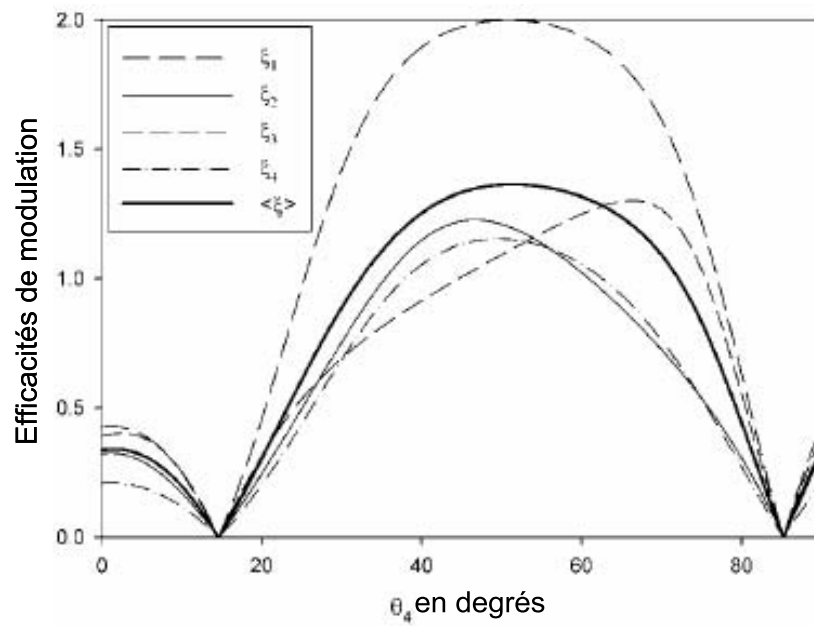


FIG. 2.6 – Les efficacités de modulation d'un polarimètre optimal en fonction de l'angle  $\theta_4$ .

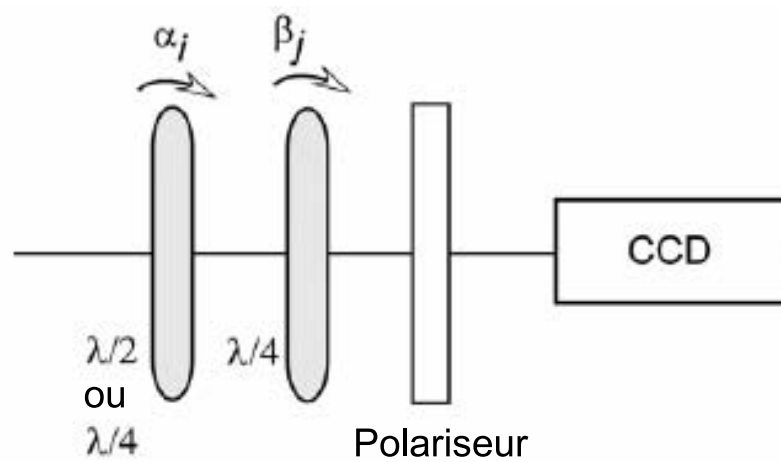


FIG. 2.7 – Configuration d'un polarimètre de Stokes à deux déphaseurs  $\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}$  ou  $\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}$  en rotation

améliore de manière significative les performances du système comparées à celles d'un polarimètre à une seule lame quart d'onde.

Le système à deux lames quart d'ondes atteint les performances du système optimal tout en utilisant des éléments standards. L'inconvénient de cette solution est d'accroître la difficulté d'alignement des éléments optiques.

	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	Conditionnement
$\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}$	$-31.2^\circ, 30.5^\circ$	$25.8^\circ, -27.1^\circ$	1.79	0.80	1.1	1.24	5.17
$\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4}$	$-20.3^\circ, 20.3^\circ$	$-41.14^\circ, 41.14^\circ$	2.0	1.156	1.155	1.153	4.47

TAB. 2.5 – Positionnement optimal d'un polarimètre de Stokes à deux déphaseurs : demi onde - quart d'onde et quart d'onde - quart d'onde. Efficacités de modulation et conditionnement. La fonction objective à optimiser est le facteur d'efficacité moyen.

### 2.6.3 Polarimètres à déphaseurs variables

On considère ici les systèmes imageurs basés sur des déphaseurs à cristaux liquides. Dans un tel système, la modulation de la polarisation se fait en appliquant des tensions électriques à deux déphaseurs à cristaux liquides ( $RV$ ) fixes. Ces déphaseurs sont suivis par un polariseur linéaire fixe ( $PL$ ) devant la caméra. Plusieurs systèmes qui utilisent cette technique de modulation ont été présentés dans la littérature [23],[72],[34] et [46]. La matrice de modulation du PSA d'un tel système est donnée par :

$$W = M_{PL}.M_{RV}(\delta_2, \theta_2).M_{RV}(\delta_1, \theta_1) \quad (2.43)$$

où  $M_{PL}$  et  $M_{RV}$  correspondent aux matrices de Mueller des éléments optiques individuels.

Une fois que les orientations des déphaseurs  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont fixées, 4 couples de retards  $(\delta_i, \delta_j)_{i,j=1,2}$  sont utilisés pour obtenir les images de Stokes que l'on souhaite.

Les valeurs optimales des orientations et des retards sont obtenues par une maximisation numérique du facteur d'efficacité moyen [23]. Le résultat optimal fournit les efficacités de modulation suivantes

$$\xi_i = \{2.0, 1.1547, 1.1547, 1.1547\} \quad (2.44)$$

Ce qui montre le comportement idéal d'un tel système vis à vis de la contamination par le bruit.

### 2.6.4 Simulations et résultats

Afin d'illustrer le lien entre les efficacités de modulation d'un système polarimétrique et le bruit qui affecte les images intensités acquises, on utilise l'équation (2.13) pour synthétiser les images intensités correspondant à une image de Stokes spécifique. Ceci se fait en utilisant les matrices correspondant au polarimètre de Stokes à deux déphaseurs d'une part et au polarimètre de Stokes standard à lame quart d'onde d'autre part. L'image

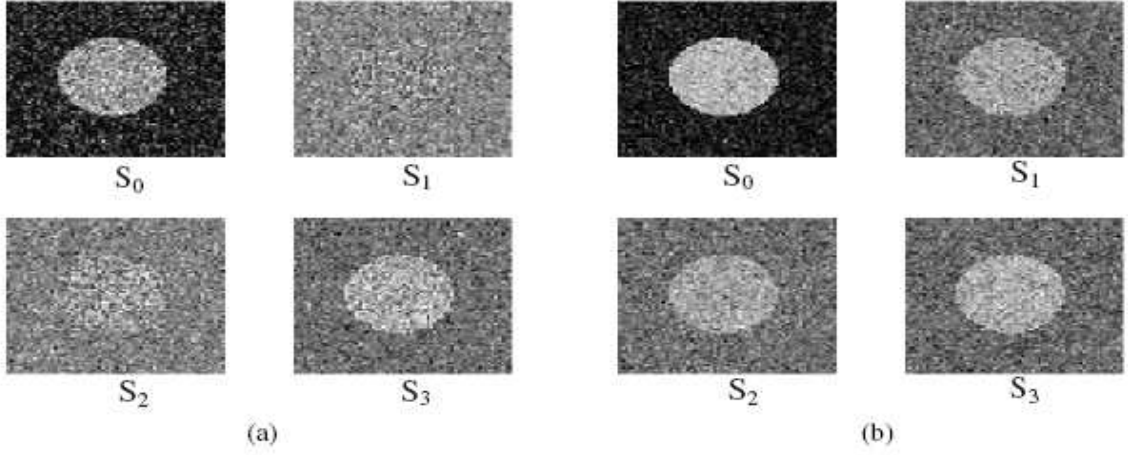


FIG. 2.8 – Images de Stokes reconstruites à partir des images intensités bruitées, (a) correspond au polarimètre standard. (b) au polarimètre à deux déphaseurs quart d’onde

de synthèse considérée est comme suit : Le vecteur de Stokes au centre de l’image (région circulaire) est fixé à  $S = [1, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ , et à zéro hors cette région [77]. On inverse ces images de Stokes selon la formule (2.13) et on ajoute aux images intensités résultantes un bruit blanc gaussien de moyenne zéro et de variance 0.1. Les images de Stokes bruitées des deux systèmes sont ensuite reconstruites en utilisant la formule de l’équation (2.40).

La figure (2.8) montre les images de Stokes correspondant aux deux systèmes. Cette figure indique que les images résultant du polarimètre à deux déphaseurs sont moins sensibles au bruit statistique en raison de ses efficacités de modulation élevées . En plus du meilleur contraste obtenu avec les systèmes à deux déphaseurs, la quantité de bruit atteignant les canaux ( $S_1 - S_3$ ) est approximativement la même (voir figure(2.8.b)). Ceci n’est pas le cas des images de la figure(2.8.a) du polarimètre standard. Ces images sont en effet moins contrastées que celles présentées dans la figure (2.8.b), plus particulièrement pour les canaux ( $S_1 - S_2$ ).

Dans le but d’enlever autant que possible la contribution du bruit à ces images, nous procédons d’abord à une estimation de ce bruit en utilisant la méthode du «Scatter plot»[10]. Les moyennes  $\mu(i, j)$  et variances  $\sigma(i, j)$  locales des images intensités sont calculées en utilisant une fenêtre glissante de taille  $m \times m$  sur toute l’image  $g$  en utilisant :

$$\begin{aligned} \mu(i, j) &= \frac{1}{(2m+1)^2} \sum_{k=-m}^m \sum_{l=-m}^m g(i+k, j+l) \\ \sigma^2(i, j) &= \frac{1}{(2m+1)^2-1} \sum_{k=-m}^m \sum_{l=-m}^m [g(i+k, j+l) - \mu(i, j)]^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ces statistiques locales calculées sur chaque image sont ensuite représentées dans un plan  $(\mu, \sigma)$ . Ce plan est divisé en blocs de taille  $L \times L$  ( $L = 10$  par exemple). Les blocs ayant le plus de points sont sélectionnés et considérés comme représentatifs des zones homogènes

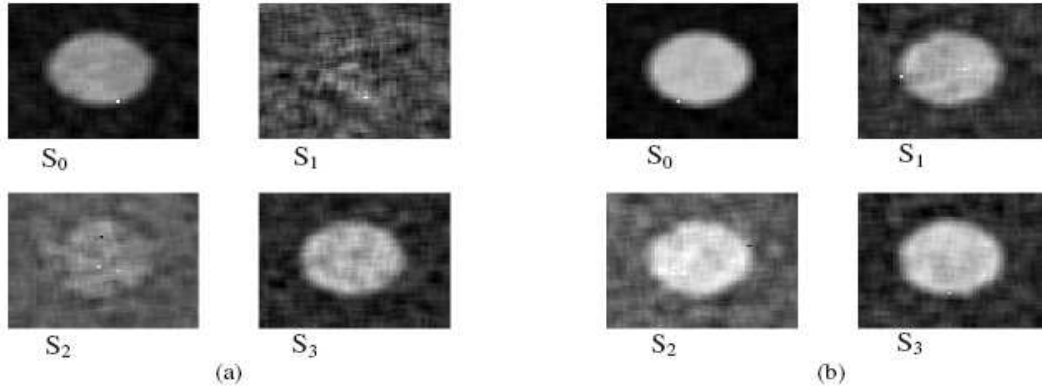


FIG. 2.9 – Images de Stokes filtrées des deux configurations étudiées, (a) du polarimètre à lame quart d’onde en rotation. (b) du polarimètre à deux déphaseurs quart d’onde

de l’image. Pour les pixels appartenant à ces blocs, l’estimation du bruit  $\hat{n}$  peut être obtenue par :

$$\hat{n}(i, j) = \sqrt{\frac{(2m + 1)^2}{(2m + 1)^2 - 1}} [g(i, j) - \mu(i, j)] \quad (2.46)$$

En supposant que le bruit est additif, on obtient à la fin du processus d’élimination du bruit de chaque image intensité, une estimation de l’image de Stokes non-bruitée correspondante. La figure (2.9) illustre le résultat obtenu en appliquant l’algorithme d’estimation du bruit sur les images des deux polarimètres utilisés. La figure (2.9.a) correspond aux images de Stokes débruitées du polarimètre à lame quart d’onde, et la figure (2.9.b) représente les images de Stokes débruitées du polarimètre à deux déphaseurs. On observe que la méthode d’estimation du bruit est plus performante dans le deuxième cas. En effet dans la figure (2.9.a), l’information attachée aux canaux de Stokes  $S_1$  et  $S_2$  est perdue durant la procédure d’inversion à cause de la configuration sous-optimale du système. Le tableau (2.6) montre clairement que les efficacités de modulation sont inversement proportionnelles à l’amplification du bruit atteignant les images de Stokes : Plus l’efficacité de modulation est grande, plus le bruit additif est mieux estimé et donc mieux réduit. En conclusion, les efficacités de modulation sont un indicateur de la robustesse et de la sensibilité des systèmes polarimétriques au bruit [77].

## 2.7 Conclusion

Nous avons examiné plusieurs types d’erreur et de bruit qui affectent les polarimètres imageurs. L’utilisation de l’algèbre standard et les propriétés du produit de Kronecker nous a permis de proposer une étude exhaustive de la configuration optimale de ces systèmes. Nous avons montré également qu’une approche d’analyse commune permet de traiter les

		$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
polarimètre à lame quart d'onde	$\xi_i$	1.31	0.72	0.70	1.53
	$\sigma$ estimée sur $\hat{S}$	0.157	0.296	0.305	0.138
polarimètre à deux lames quart d'ondes	$\xi_i$	2.00	1.155	1.155	1.155
	$\sigma$ estimée sur $\hat{S}$	0.109	0.161	0.158	0.158

TAB. 2.6 – Estimation de la déviation standard du bruit des images de Stokes pour deux configurations du polarimètre. La méthode utilisée pour l'estimation du bruit est la méthode du Scatter plot.

polarimètres de Stokes ainsi que ceux de Mueller.

Dans tous les cas de figures, l'utilisation de la notion d'efficacité de modulation en tant que fonction de mérite pour l'optimisation des systèmes polarimétriques est le meilleur outil pour évaluer l'impact du bruit sur les images codées en polarisation et ceci sur chaque canal de polarisation.

De plus, nous avons montré que les performances du polarimètre optimal peuvent être atteintes en utilisant des éléments standards uniquement.

Nous avons montré également que les techniques de filtrage classiques du bruit peuvent avoir leur intérêt pour les polarimètres optimaux.





# Chapitre 3

## Filtrage des images polarimétriques

### 3.1 Introduction

L'existence du bruit en imagerie polarimétrique est inhérente aux systèmes imageurs. Causé par différents mécanismes, sa présence dégrade en général l'interprétation des données et peut dans le cas de l'imagerie polarimétrique induire le caractère non physique des mesures. Il convient donc de l'éliminer ou *a fortiori* de minimiser son effet.

Sous l'hypothèse de l'approximation gaussienne du bruit qui peut affecter les différents canaux polarimétriques, les bruits de nature additive (pour un éclairage incohérent) ou multiplicative (pour un éclairage cohérent par laser) sont traités en utilisant une nouvelle variante de la méthode du scatter plot [10] et du masquage des données [22]. Ces deux méthodes sont combinées avec une vectorisation de l'image par un parcours de type Piano-Hilbert pour préserver la connexité des pixels et minimiser l'impact des points aberrants. Les performances et les biais des méthodes d'estimation testées sont étudiés statistiquement par la méthode du Bootstrap [14].

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord les deux méthodes d'estimation utilisées ; «Scatter plot» et «masquage des données», ainsi que leurs validations sur des images intensités. Nous introduisons ensuite une technique de vectorisation par une courbe fractale de Piano-Hilbert, couplée aux deux méthodes précédentes. La comparaison des résultats des trois méthodes nous conduit à choisir la plus performante afin de la valider sur des images polarimétriques prises sous un éclairage incohérent.

### 3.2 Origine et forme du bruit

Le bruit sur les images est causé par de nombreux facteurs [22]. On cite : les effets thermiques, la saturation du capteur, les erreurs de quantification et de lecture et le bruit photonique. etc. Le bruit des images multi-composantes est généralement additif dans sa nature et est considéré comme typiquement indépendant. Ce type de bruit est représenté par un processus aléatoire, normalement distribué, de moyenne zéro et de fonction de densité de probabilité (pdf)  $f_x(x)$  définie par [22] :

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (3.1)$$

où  $\sigma_n$  est la déviation standard du bruit.

L'effet d'un bruit additif  $n_a$  sur une image numérique  $g$  en un pixel  $(i, j)$  s'exprime par la somme du signal original non bruité  $I$  et du bruit :

$$g(i, j) = I(i, j) + n_a(i, j) \quad (3.2)$$

Dans le cas d'un éclairage cohérent (radar, laser), le bruit est multiplicatif. Après diffusion, la lumière cohérente incidente sur l'objet imagé se divise en une multitude de sources réparties sur sa surface. Les ondes issues de ces sources interfèrent entre elles d'une manière constructive ou destructive causant un effet granulaire. Ce bruit sur l'image appelé «bruit de Speckle» résulte donc d'un processus interférentiel complexe produit par une multitude de sources ponctuelles cohérentes. Ce type de bruit aléatoire est modélisé dans ce travail par un processus gaussien de moyenne unité et de variance  $\sigma_m^2$  ayant comme pdf [22] :

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\sigma_m^2}\right) \quad (3.3)$$

L'effet d'un bruit multiplicatif  $n_m$  sur l'image  $I$  s'écrit :

$$g(i, j) = I(i, j)n_m(i, j) \quad (3.4)$$

### 3.3 Incidence du bruit sur les mesures polarimétriques

#### 3.3.1 Bruit additif

Considérons un bruit additif gaussien de moyenne zéro et de variance quelconque indépendant du signal. En l'absence de tout bruit, la matrice de Mueller  $M(i, j)$  du pixel  $(i, j)$  est reliée aux 16 intensités  $I(i, j)$  mesurées en ce pixel par l'équation matricielle suivante [57] :

$$M(i, j) = A^{-1}I(i, j)P^{-1} \quad (3.5)$$

où  $A$  et  $P$  sont respectivement les matrices de modulation du *PSA* et du *PSG* du système imageur.

En négligeant les erreurs systématiques du polarimètre, la matrice de Mueller  $\hat{M}$  estimée du pixel  $(i, j)$ , en présence du bruit additif est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{M}(i, j) &= A^{-1}g(i, j)P^{-1} = A^{-1}(I(i, j) + n_a(i, j))P^{-1} \\ &= A^{-1}I(i, j)P^{-1} + A^{-1}n_a(i, j)P^{-1} \\ &= M(i, j) + \delta M(i, j) \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Remarque**

D'après l'équation (3.6), le bruit sur les images intensités se propage à l'image de Mueller et est donné par  $\delta M = A^{-1}n_a(i, j)P^{-1}$ .

L'estimation du bruit additif  $n_a$  qui affecte les images intensités  $I$  en chaque pixel, permet d'accéder au bruit sur les images de Mueller.

**3.3.2 Bruit multiplicatif**

Le bruit multiplicatif  $n_m$  que l'on souhaite estimer est supposé aléatoire, gaussien de moyenne unité et de variance  $\sigma_m^2$ , s'écrit :

$$n_m = 1 + r \quad (3.7)$$

où  $r$  est un processus aléatoire gaussien de moyenne zéro et de variance  $\sigma_m^2$ . Cette formule, permet de remplacer l'équation (3.4) par :

$$g(i, j) = I(i, j) + I(i, j).r(i, j) \quad (3.8)$$

La matrice de Mueller expérimentale en ce pixel  $(i, j)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{M}(i, j) &= A^{-1}g(i, j)P^{-1} = A^{-1}(I(i, j) + I(i, j)r(i, j))P^{-1} \\ &= A^{-1}I(i, j)P^{-1} + A^{-1}I(i, j)r(i, j)P^{-1} \\ &= M(i, j) + \delta M(i, j) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le bruit multiplicatif sur les images intensités se transforme donc en bruit additif dépendant des intensités sur les images de Mueller ( $\delta M(i, j) = A^{-1}I(i, j)r(i, j)P^{-1}$ ).

**Remarque**

Le cas particulier des images de Stokes est similaire à celui des images de Mueller. Il suffit de remplacer la matrice  $M$  par le vecteur de Stokes  $S$  et la matrice de modulation du générateur  $P$  par la matrice unité.

**3.4 Méthodes de filtrage classiques**

Une littérature abondante traite les méthodes d'estimation du bruit aléatoire [47], [48], [11], [10], [62] et [22]. Dans ce travail nous nous sommes intéressés à deux méthodes d'estimation éprouvées dans le cadre des images multi spectrales : la méthode du Scatter plot [10] et la méthode d'estimation par masquage de données [22].

Comme dans la plupart des méthodes d'estimation du bruit, ces deux méthodes présentent quelques limitations face à certaines images. Pour cela, on a proposé une technique basée sur les deux méthodes choisies et intitulée «Estimation du bruit par vectorisation des

données selon la courbe de Piano-Hilbert». Les trois méthodes sont validées d'abord sur des images intensités afin de comparer leurs performances et notamment leurs limitations. Ensuite la troisième méthode est appliquée à l'estimation du bruit des images polarimétriques.

Le principe utilisé dans les différentes techniques d'estimation qu'on présentera est basé sur le rééchantillonnage Bootstrap [14] en réitérant l'estimation 200 fois. La moyenne empirique des résultats Bootstrap fournit l'estimée de la déviation standard du bruit relativement à la méthode utilisée. La dispersion des valeurs autour de la moyenne est donnée par la déviation standard des 200 itérations. Plus petite est la dispersion mieux est l'estimateur. Si on symbolise par  $\sigma_d$  cette dispersion et par  $\hat{\sigma}$  la déviation standard du bruit à estimer qui est la moyenne des itérations, la valeur exacte de la déviation standard du bruit additif ou multiplicatif qui affecte l'image est comprise entre  $\sigma - 3 \times \sigma_d$  et  $\sigma + 3 \times \sigma_d$  dans 99.73% des cas. Cet intervalle est un indicateur du degré d'incertitude de la méthode d'estimation utilisée.

### 3.4.1 Méthode du Scatter plot

La méthode du Scatter plot est basée sur la considération suivante : dans les zones homogènes de l'image, l'écart type des pixels de l'image non bruitée  $\sigma_g$  est négligeable par rapport à celui du bruit  $\sigma_{na}$ . Ainsi dans les zones homogène on a :

$$\sigma_g(i, j) = \sigma_{na} \quad (3.10)$$

De ce fait, dans les zones homogènes, l'estimée  $\hat{\sigma}_{na}$  peut être interprétée comme la différence de  $g$  et de la moyenne  $\mu_g$  (la moyenne locale du bruit étant supposée nulle).

L'algorithme Scatter plot est présenté comme suit :

1. A l'aide d'une fenêtre glissante de taille  $(2m + 1) \times (2m + 1)$  sur l'image entière, on calcule les moyennes locales de l'image bruitée par :

$$\bar{g}(i, j) = \frac{1}{(2m + 1)^2} \sum_{k=-m}^{k=m} \sum_{l=-m}^{l=m} g(i + k, j + l) \quad (3.11)$$

et ses écarts types locaux :

$$\hat{\sigma}_g(i, j)^2 = \frac{1}{(2m + 1)^2 - 1} \sum_{k=-m}^{k=m} \sum_{l=-m}^{l=m} [g(i + k, j + l) - \bar{g}(i, j)]^2 \quad (3.12)$$

Donc  $(M - 2m) \times (N - 2m)$  valeurs sont calculées pour  $\bar{g}(i, j) = \hat{\mu}_g(i, j)$  et  $\hat{\sigma}_g(i, j)$

2. On trace  $\hat{\sigma}_g(i, j)$  en fonction des  $\hat{\mu}_g(i, j)$
3. On partitionne ce plan en blocs rectangulaires de taille  $L \times L$  étiquetés avec l'indice  $k$

4. On ordonne les blocs selon l'ordre décroissant du nombre de points qu'ils contiennent :  $Card(B^k) \geq Card(B^{k+1}), k = 1, 2, \dots, L^2$  et on repère ceux qui possèdent le plus de points.
5. Ces blocs sont considérés comme issus des parties homogènes de l'image. Enfin, on calcule la moyenne  $\hat{\sigma}_g$  des points appartenant aux blocs homogènes. Cette moyenne est très proche de  $\hat{\sigma}_n$

Une fois les zones homogènes repérées, on peut calculer une estimation de la distribution du bruit :

$$\hat{n}(i, j) = \left[ \frac{(2m+1)^2}{(2m+1)^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}} [g(i, j) - \overline{g(i, j)}] \quad (3.13)$$

### Application aux images monocomposantes

Dans ce paragraphe, nous étudions la fiabilité de la méthode du Scatter plot proposée sur des images intensités afin d'estimer le bruit additif qui affecte ces images. Pour ce faire, on simule un bruit aléatoire, gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_n^2 = 10, 30$  et  $60$  qu'on ajoute à deux images de  $256 \times 256$  pixels en niveau de gris ( $g(i, j) \in [0, 255]$ ), illustrées dans la figure (3.1).

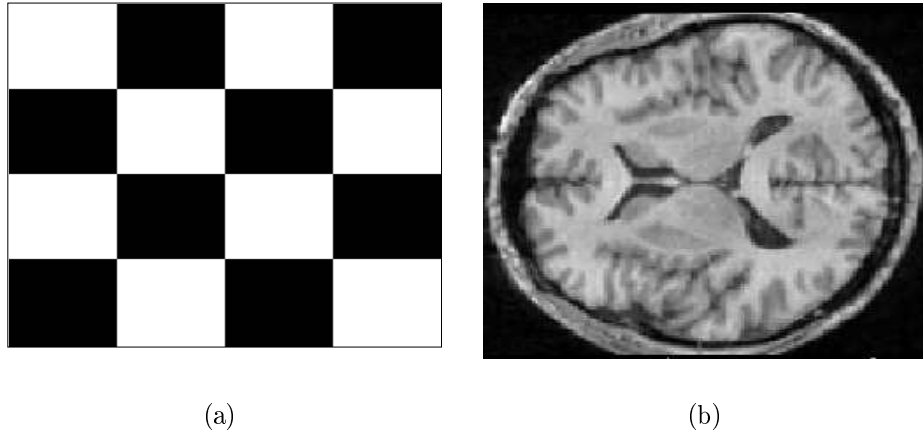


FIG. 3.1 – Images utilisées pour la validation des méthodes d'estimation du bruit. (a) Image d'un échiquier. (b) Image d'une coupe extraite d'une IRM 3D de la tête

L'estimation du bruit par la méthode du Scatter plot sur ces deux images est résumée dans le tableau (3.1). La valeur  $\hat{\sigma}_n$  de la déviation standard estimée est la moyenne des 200 itérations avec la méthode du Bootstrap et la valeur entre crochets représente la dispersion  $\sigma_d$ .

Les résultats de la simulation (tableau (3.1)) montrent que la méthode est moins performante dans le cas d'une image ayant des hautes fréquences spatiales (figure (3.1.a)). En effet, les valeurs estimées de la déviation standard pour cette image sont supérieures

paramètres du bruit	$\sigma_n^2$	$\hat{\sigma}_n^2$	$\sigma_n^2$	$\hat{\sigma}_n^2$	$\sigma_n^2$	$\hat{\sigma}_n^2$
Figure(3.1.a)	10	16.84 [0.45]	30	35.09 [0.3]	60	63.75 [0.2]
Figure(3.1.b)	10	13.12 [0.41]	30	32.45 [0.29]	60	57.41 [0.16]

TAB. 3.1 – Estimation de la variance du bruit additif des images de la figure (3.1) simulé à des variances égales à 10, 30 et 60 en utilisant la méthode du Scatter plot

à celles de l'image (3.1.b). On note cependant que l'estimation est meilleure pour des valeurs supérieures du bruit. Cela s'explique par l'utilisation dans la méthode d'une fenêtre glissante pour estimer les statistiques locales. En effet, les fortes valeurs du bruit réduisent la dispersion dans l'estimation de ces statistiques dans les zones de transition entre les régions sombres et claires de l'image.

Cette méthode est plus efficace pour l'image ayant des variations douces des niveaux de gris. D'autre part l'intervalle de variation de la déviation standard estimée du bruit est inversement proportionnel à la quantité du bruit ajouté.

Dans le cas d'un bruit multiplicatif, la déviation standard de l'image observée  $g(i, j)$  dans les zones homogènes est approximativement égale à  $\sigma_m \cdot \mu_g(i, j)$  où  $\sigma_m$  est la déviation standard du bruit multiplicatif et  $\mu_g$  est la moyenne de l'image observée. L'algorithme du Scatter plot pour l'estimation d'un bruit multiplicatif diffère de celui du bruit additif pour la dernière étape : la déviation standard du bruit multiplicatif est estimée dans les zones homogènes par la pente de la ligne de régression linéaire des points dans le plan  $(\mu, \sigma)$  de l'image. Cette ligne est horizontale dans le cas du bruit additif.

Les résultats de l'estimation du bruit multiplicatif simulé avec les images de la figure (3.1) pour les déviations standards suivantes :  $\sigma_m = 0.1, 0.5$  et  $0.8$ , sont résumés dans le tableau (3.2).

paramètres du bruit	$\sigma_m$	$\hat{\sigma}_m$	$\sigma_m$	$\hat{\sigma}_m$	$\sigma_m$	$\hat{\sigma}_m$
Figure(3.1.a)	0.1	0.15[0.02]	0.5	0.47[0.04]	0.8	0.75[0.02]
Figure(3.1.b)	0.1	0.101[0.01]	0.5	0.53[0.01]	0.8	0.78[0.005]

TAB. 3.2 – Estimation de la variance du bruit multiplicatif des images de la figure (3.1) pour des variances simulées égales à 0.1, 0.5 et 0.8 en utilisant la méthode du Scatter plot pour un bruit multiplicatif

La valeur entre crochets représente toujours la dispersion des valeurs estimées en utilisant la méthode du Bootstrap.

Le tableau (3.2) montre que la méthode est efficace dans ce cas. Les résultats restent meilleurs pour la deuxième image. Les dispersions de l'estimation dans le cas du bruit multiplicatif ne sont plus proportionnelles à la quantité de bruit.

### 3.4.2 Méthode du masquage des données

Cette méthode repose sur l'utilisation d'un masque Laplacien qui a la caractéristique de supprimer la structure de l'image (variations lentes du signal) tout en préservant l'information attachée au bruit [62], [22], [74].

L'image bruitée s'écrit

$$g(i, j) = I(i, j) + n_a(i, j) \quad (3.14)$$

où  $I$  est l'image idéale de taille  $W \times U$ .

Le but est d'estimer la déviation standard de  $g$  de l'image  $I$  qui contient l'information structurelle (texture et contours).

Pour ce faire, nous pouvons utiliser un opérateur de moyenne nulle sensible à la structure de l'image. La variance de l'image convoluée par cet opérateur est donc celle du bruit.

Comme les structures de l'image admettent une forte composante de la dérivée seconde, un estimateur du bruit doit être indépendant du Laplacien, d'où l'idée d'utiliser la différence entre deux opérateurs Laplaciens, en l'occurrence :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Il vient

$$L = 2(L_2 - L_1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

L'image convoluée  $g * L$  a une moyenne nulle et une variance

$$(4^2 + 4(-2)^2 + 4 \cdot 1^2)\sigma_n^2 = 36\sigma_n^2$$

En supposant que le bruit en chaque pixel a une variance de  $\sigma_n^2$ , la variance de  $g * L$  est une estimation de  $36\sigma_n^2$ . Finalement

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{36(W-2)(H-2)} \sum_{i,j} (g * L)^2(i, j)$$

L'application du masque Laplacien de l'équation (3.16) laisse en général quelques contours et textures qui ne font pas partie du bruit. Un filtre détecteur de contour est donc nécessaire afin de détecter ces bords et les supprimer ensuite de l'image Laplacien : cela se fait par l'application d'un filtre gradient à l'image Laplacien. Les masques utilisés pour ce faire sont :

$$f_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

et le masque gradient final se calcule par la formule suivante :



$$|\nabla f| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad (3.18)$$

Ce gradient est le filtre détecteur de contours de Sobel [42]. Après localisation de contours, un seuil est choisi pour binariser l'image [54]. Les pixels dont les valeurs sont supérieures au seuil sont éliminés. Le seuil optimal est celui qui maximise la variance de l'image résultat.

La dernière étape de l'estimation est le calcul des déviations standards locales de l'image Laplacien après élimination des pixels correspondant aux contours. Ces statistiques locales sont calculées sur des blocs  $9 \times 9$  en ne tenant pas compte des pixels correspondant aux contours. La médiane de l'histogramme des déviations standard locales fournit la meilleure estimation de la déviation standard du bruit.

Le traitement du bruit multiplicatif débute par l'application d'un logarithme à l'image bruitée. Ceci transforme le bruit multiplicatif en un bruit additif dans le domaine logarithmique. La procédure d'estimation du bruit décrite précédemment pour un bruit additif est ensuite appliquée à l'image résultante. L'estimation finale dans ce cas est fournie par la médiane de l'histogramme des déviations standards locales à laquelle on soustrait la variance de l'histogramme.

Le logarithme compresse la dynamique des valeurs des pixels de l'image. Nous avons observé expérimentalement que la soustraction de la variance de l'histogramme produit la meilleure estimation.

### Application aux images monocomposantes

L'échantillon d'images sur lequel on applique la méthode du masquage des données est le même que celui de la figure (3.1). Les bruits additifs simulés sont également les mêmes, autrement dit : gaussien, indépendant de moyenne zéro et de variances respectives  $\sigma_n^2 = 10$ ,  $\sigma_n^2 = 30$  et  $\sigma_n^2 = 60$ . Les résultats de cette méthode sont donnés dans le tableau (3.3). Les dispersion  $\sigma_d$  entre crochets résultent du rééchantillonnage Bootstrap.

paramètres du bruit	$\sigma_n^2$	$\hat{\sigma}_n^2$	$\sigma_n^2$	$\hat{\sigma}_n^2$	$\sigma_n^2$	$\hat{\sigma}_n^2$
Figure(3.1.a)	10	11.45[0.32]	30	32.75[0.27]	60	62.04[0.12]
Figure(3.1.b)	10	11.23[0.3]	30	31.01[0.15]	60	61.08[0.2]

TAB. 3.3 – Estimation de la variance du bruit additif des images de la figure (3.1) simulé à des variances égales à 10, 30 et 60 en utilisant la méthode du masquage des données

Les variances estimées sur la première image sont respectivement égales à 11.45 pour une variance de 10, à 32.75 pour une variance de 30 et à 62.04 pour une variance de 60. Pour la deuxième image les variances estimée sont égales à 11.23 pour une variance de 10, à 31.01 pour une variance de 30 et à 61.08 pour une variance de 60. L'estimation par masquage de données semble plus performante que la méthode du Scatter plot. Ceci est également prouvé par les dispersions affichées dans le tableau (3.3) qui sont plus étroites

que dans le cas du Scatter plot. Ceci est dû au fait que l'estimation procède directement sur les paramètres attachés au bruit.

Les résultats d'estimation par masquage de données pour un bruit multiplicatif simulé ayant les déviations standards  $\sigma_m = 0.1, 0.5$  et  $0.8$  sont résumés dans le tableau (3.4) :

paramètres du bruit	$\sigma_m$	$\hat{\sigma}_m$	$\sigma_m$	$\hat{\sigma}_m$	$\sigma_m$	$\hat{\sigma}_m$
Figure(3.1.a)	0.1	0.23[0.03]	0.5	0.38[0.02]	0.8	0.61[0.02]
Figure(3.1.b)	0.1	0.19[0.02]	0.5	0.45[0.02]	0.8	0.7[0.1]

TAB. 3.4 – Estimation de la variance du bruit multiplicatif des images de la figure (3.1) pour des variances simulées égales à 0.1, 0.5 et 0.8 en utilisant la méthode du masquage des données pour un bruit multiplicatif

Dans le cas d'un bruit multiplicatif, les tableaux (3.2) et (3.4) montrent que l'estimation par Scatter plot est légèrement meilleure que celle du masquage des données, du moins sur les images utilisées. Les dispersions Bootstrap confirment également ce constat. Ceci est dû à la non linéarité de la compression logarithmique.

### 3.4.3 Estimation du bruit par vectorisation des données selon la courbe de Piano-Hilbert

Malgré son intérêt, la méthode du Scatter plot a ses limitations quand il s'agit d'une image riche en informations (fortement texturée ou ayant de multiples contours). Cette méthode présente aussi l'inconvénient d'être coûteuse en temps de calcul à cause du calcul des statistiques locales par fenêtre glissante. L'estimation du bruit par masquage de données est au moins aussi efficace que le Scatter plot en ce qui concerne le bruit additif. En revanche cette méthode souffre du problème de surestimation de la déviation standard du bruit due aux contours qui ne sont pas complètement éliminés.

L'idée d'un masque Laplacien appliqué à l'image bruitée afin de supprimer le signal original est très intéressante. Par ailleurs, le plan du Scatter plot des statistiques locales nous permet d'estimer la déviation standard du bruit d'une manière très efficace. Par conséquent, la combinaison de ces deux techniques nous permet de construire une méthode d'estimation du bruit qui conjugue les avantages des deux méthodes précédemment utilisées.

L'image est initialement filtrée par le masque Laplacien présenté dans l'équation (3.16), ensuite par le filtre détecteur de contours de Sobel afin d'éliminer les perturbations causées par les contours. Le but de cette opération est de supprimer le signal original et ne laisser que l'information résiduelle de l'image. Comme la méthode du Scatter plot est coûteuse en temps de calculs, l'image Laplacien est transformée en un vecteur sur lequel on calcule les statistiques locales. Cette vectorisation se fait selon un chemin fractal qui n'est autre que la courbe de Piano-Hilbert.

Le tableau (3.5) montre le chemin suivi par la courbe de Piano-Hilbert sur un exemple d'image de taille  $9 \times 9$ . Le vecteur image suit alors l'ordre des numéros de 1 à 81.

1	6	7	48	49	54	55	60	61
2	5	8	47	50	53	56	59	62
3	4	9	46	51	52	57	58	63
16	15	10	45	40	39	70	69	64
17	14	11	44	41	38	71	68	65
18	13	12	43	42	37	72	67	66
19	24	25	30	31	36	73	78	79
20	23	26	29	32	35	74	77	80
21	22	27	28	33	34	75	76	81

TAB. 3.5 – chemin suivi par la courbe de Piano-Hilbert sur une imagerie de taille  $9 \times 9$  : le chemin suit les chiffres dans l'ordre de 1 à 81.

Les moyennes  $\mu$  et les déviations standards  $\sigma$  sont calculées en utilisant un intervalle glissant sur tout le vecteur. Les déviations standards locales sont ensuite représentées en fonction des moyennes locales sur le plan  $(\mu, \sigma)$ . Ce plan comporte deux types de points : Le premier type est un amas de points regroupés en un nuage dense. L'intersection de la ligne de régression horizontale de ces points avec l'axe des  $y$  donne la meilleure estimation de la déviation standard du bruit additif. Le deuxième type de points sont des points dispersés et isolés autour du nuage dense et correspondent aux pixels représentatifs des contours et textures qui ne sont pas éliminés après application du filtre de Sobel. Ces points ne sont pas pris en compte par le processus de régression, ce qui évite en grande partie la surestimation ou la sous-estimation de la déviation standard du bruit.

Si l'image est affectée par  $N$  bruits additifs gaussiens de moyennes zéro et ayant  $N$  déviations standards différentes, on obtient  $N$  nuages de points dans le plan  $(\mu, \sigma)$ . Chaque nuage correspond à un bruit et est centré autour de sa déviation standard. De même, l'intersection des régressions linéaires horizontales faites séparément sur chaque nuage de points nous donne une estimation des  $N$  déviations standards.

Dans le cas d'un bruit multiplicatif, un logarithme est appliqué à l'image bruitée, ce qui transforme le bruit multiplicatif en un bruit additif. Les étapes d'estimation qui suivent sont les mêmes que pour l'estimation d'un bruit additif mais sur une échelle logarithmique. L'intersection de la droite de régression horizontale et de l'axe des  $y$  du plan  $(\mu, \sqrt{\sigma^2 - \mu^2})$  fournit la meilleure estimation de la déviation standard du bruit multiplicatif. La procédure d'estimation est donc résumée comme suit :

1. Filtrage de l'image par le noyau Laplacien  $L$  (équation (3.16)). Dans le cas d'un bruit multiplicatif, le Laplacien est appliqué au logarithme de l'image bruitée.
2. Application du filtre de Sobel à l'image Laplacien afin de détecter et d'éliminer ensuite les pixels correspondants aux contours et textures qui ne font pas partie du bruit.
3. Transformation de l'image du bruit (étape 2) en un vecteur  $V$ , suivant la courbe de Piano-Hilbert.

4. Calcul des statistiques locales (moyenne( $\mu$ ), déviation standard( $\sigma$ )) en utilisant un intervalle glissant de taille  $(2m + 1)^2$  :

$$\hat{\mu}_V(i) = \frac{1}{(2m + 1)^2} \sum_{k=-m}^{k=m} V(i + k) \quad (3.19)$$

et

$$\hat{\sigma}_V(i)^2 = \frac{1}{(2m + 1)^2 - 1} \sum_{k=-m}^{k=m} [V(i + k) - \hat{\mu}_V(i)]^2 \quad (3.20)$$

5. – Bruit additif : On trace dans le plan  $(\mu, \sigma)$  les valeurs obtenues en (4). L'intersection avec l'axe des  $y$  et de la ligne de régression horizontale fournit l'estimation de la déviation standard du bruit.  
 – Bruit multiplicatif : L'intersection avec l'axe des  $y$  et de la ligne de régression horizontale du plan  $(\mu, \sqrt{\sigma^2 - \mu^2})$  fournit l'estimation de la déviation standard du bruit multiplicatif.

La dispersion des points autour des nuages denses est due aux contours, qui n'ont pas été totalement éliminés par les filtres Laplacien et Sobel. Leur contribution ne perturbe pas l'estimation, car ces points ne sont pas pris en compte par le processus de régression.

### Application aux images monocomposantes

Les résultats de notre méthode pour l'estimation du bruit additif sont résumés dans le tableau (3.6).

paramètres du bruit	$\sigma_n^2$	$\hat{\sigma}_n^2$	$\sigma_n^2$	$\hat{\sigma}_n^2$	$\sigma_n^2$	$\hat{\sigma}_n^2$
Figure(3.1.a)	10	10.97 [0.02]	30	29.59[0.01]	60	60.75[0.01]
Figure(3.1.b)	10	9.38 [0.01]	30	30.25[0.009]	60	60.09 [0.007]

TAB. 3.6 – Estimation de la variance du bruit additif des images de la figure (3.1) simulé à des variances égales à 10, 30 et 60 en utilisant la technique proposée

Ce tableau montre que la méthode de vectorisation est meilleure que les deux méthodes présentées précédemment. Ceci est également confirmé par les dispersions affichées à côté des variances estimées. Les variances estimées pour l'échiquier sont égales à 10.97 pour une variance simulée égale à 10, à 29.59 pour une variance simulée égale à 30 et à 60.75 pour une variance simulée égale à 60. Ces valeurs estimées sont légèrement supérieures aux variances simulées. Cela est dû à la présence de fortes transitions de textures dans l'image de l'échiquier. Les variances estimées pour la deuxième image sont égales à 9.38 pour une variance de 10, à 30.25 pour une variance de 30 et à 60.09 pour une variance de 60.

Les plan  $(\mu, \sigma)$  correspondant aux images de la figure (3.1) pour un bruit additif ayant une variance égale à  $\sigma_n^2 = 30$  est illustré sur la figure (3.2). On voit bien dans les deux cas le nuage de points correspondant au bruit. L'intersection de la régression linéaire horizontale et de l'axe des ordonnées fournit l'estimation de la déviation standard du bruit

ajouté ( $\sqrt{30} = 5.47$ ). On remarque sur le plan des points isolés et dispersés autour du nuage central. Ces points représentent les pixels correspondant aux contours qui n'ont pas été éliminés après le processus de filtrage.

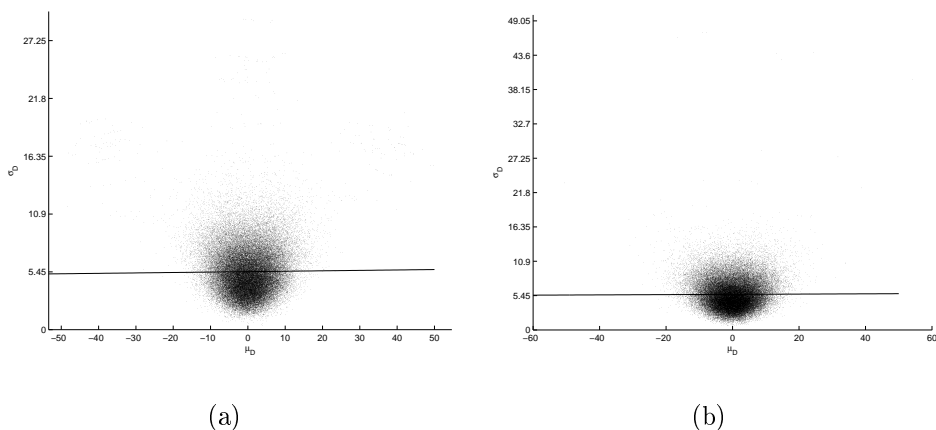


FIG. 3.2 – Plans  $(\mu, \sigma)$  correspondant aux images des. (a) figure (3.1.a), (b) figure (3.1.b) en utilisant la méthode d'estimation par vectorisation selon la courbe de Piano-Hilbert

Les résultats d'estimation du bruit multiplicatif pour les déviations standard de 0.1, 0.5 et 0.8 sont résumés dans le tableau (3.7).

paramètres du bruit	$\sigma_m$	$\hat{\sigma}_m$	$\sigma_m$	$\hat{\sigma}_m$	$\sigma_m$	$\hat{\sigma}_m$
Figure(3.1.a)	0.1	0.17[0.01]	0.5	0.42[0.006]	0.8	0.73[0.004]
Figure(3.1.b)	0.1	0.13[0.009]	0.5	0.52[0.005]	0.8	0.78[0.001]

TAB. 3.7 – Estimation de la variance du bruit multiplicatif des images de la figure (3.1) pour des variances simulées égales à 0.1, 0.5 et 0.8 en utilisant la méthode de vectorisation proposée

Le tableau montre que la méthode est performante vis-à-vis des dispersions calculées par la méthode Bootstrap. Par ailleurs, les résultats d'estimation du bruit multiplicatif en utilisant la technique de vectorisation sont semblables à ceux des deux méthodes précédentes.

Cette méthode a été retenue pour le filtrage du bruit dans les images polarimétriques.

### 3.5 Filtrage du bruit des images polarimétriques

Dans cette section, nous allons étudier l'estimation du bruit additif en imagerie polarimétrique. Pour cette étude, nous avons choisi deux images de Stokes : la première est l'image de synthèse utilisée dans le chapitre précédent (figure(3.3)) et la deuxième est une image de Stokes réelle acquise en utilisant le polarimètre du laboratoire.

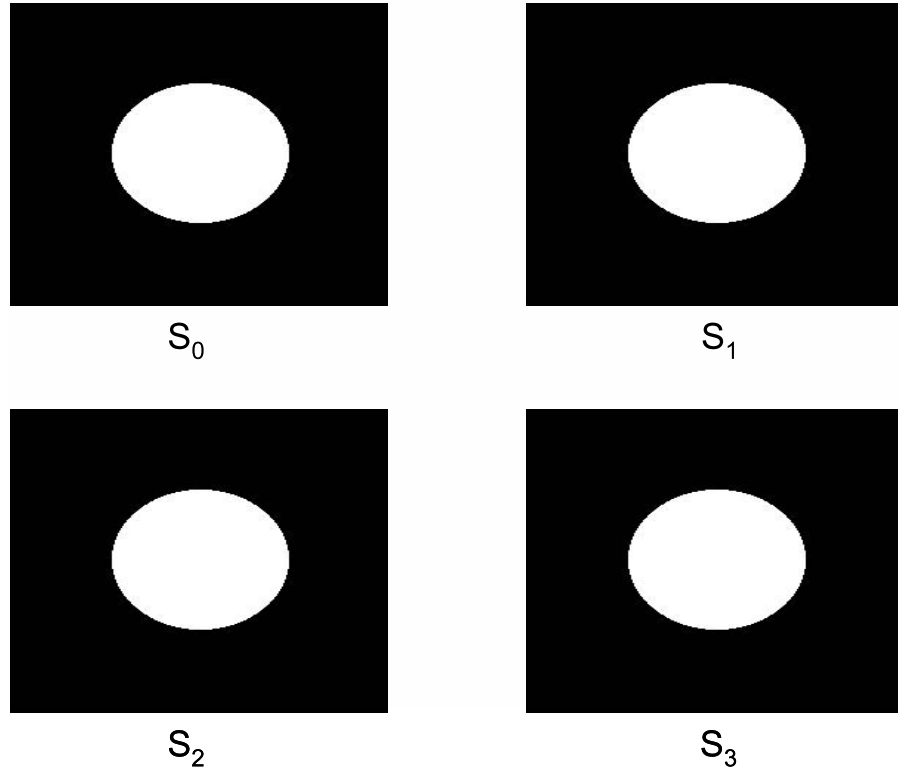


FIG. 3.3 – Image de synthèse de référence.

Le bruit à estimer pour la première image est additif, gaussien, indépendant de moyenne nulle et de variance  $\sigma_n^2 = 0.3$ . Les images intensités bruitées sont illustrées sur la figure (3.4).

L'image de Stokes correspondant aux images bruitées est calculée et illustrée par la figure (3.5).

La variance du bruit additif estimée par vectorisation de l'image est égale à 0.27, 0.28, 0.292 et 0.29 respectivement pour les quatre images intensités correspondant à  $S_0, S_1, S_2$  et  $S_3$ . Ces valeurs estimées sont très proches de la valeur théorique.

Les images du bruit sur les canaux de Stokes sont reconstruites en appliquant la procédure d'estimation sur les images bruitées  $S_0 - S_3$ . L'élimination de ce bruit se fait par soustraction de l'image du bruit reconstruite et multipliée par une constante  $\alpha$  entre 0 et 1 afin de garder la réalisabilité physique des pixels (voir annexe C pour tous les détails). Ce facteur doit être choisi d'une manière optimale pour chaque pixel. Il doit être suffisamment grand pour éliminer le maximum de bruit et suffisamment petit pour respecter la contrainte physique que doit satisfaire un vecteur de Stokes en chaque pixel de l'image. L'image du paramètre  $\alpha$  est illustrée sur la figure (3.6). On voit en blanc les pixels traités par la procédure de débruitage sous contraintes et en noir les pixels pour lesquels le paramètre  $\alpha$  n'est pas dans l'intervalle  $[0,1]$  ou n'est même pas réel. Cette technique nous a donc permis de passer de 10% à 43% de pixels physiquement traités.

Le résultat du débruitage sous contraintes est illustré sur la figure (3.7)

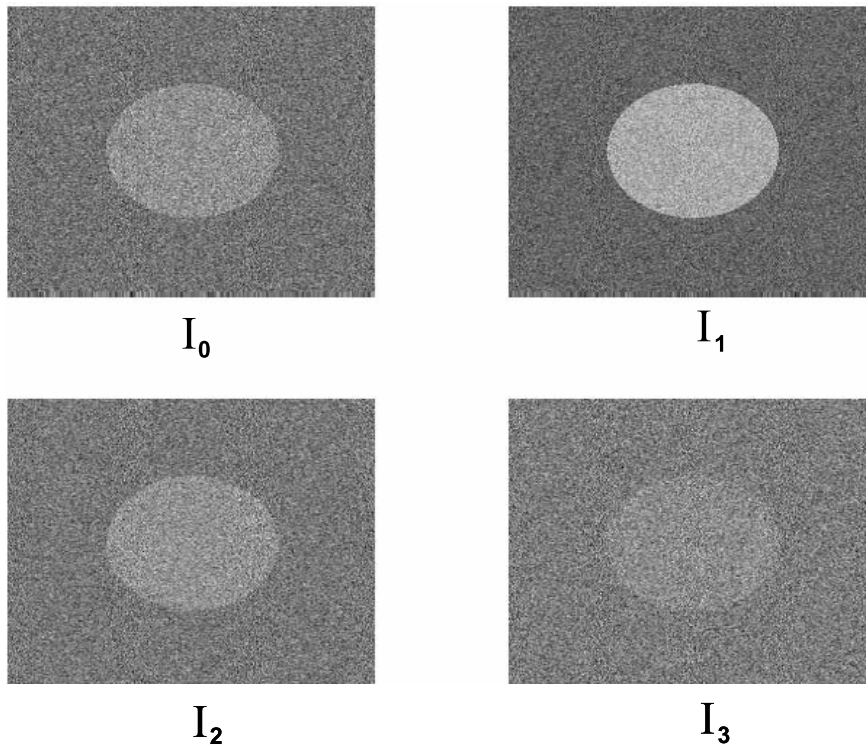


FIG. 3.4 – Image intensité bruitée

On observe une amélioration significative de l'image de Stokes filtrée tout en assurant la validité physique de la plupart des pixels de l'image.

L'image réelle est illustrée sur la figure (3.8)

Il s'agit d'une image de 4 objets transparents A, B, C et D collés sur carton couvert par du papier cellophane, acquise à l'aide du polarimètre du laboratoire qui est du type «lames quart d'onde mobiles en rotation». Cette image est affectée en partie par un bruit additif dont on reconnaît pas les statistiques. Les variances du bruit estimées sur les images intensités de cet échantillon par la méthode de vectorisation sont 10.75, 10.52, 9.78 et 9.88 respectivement. Ceci confirme la remarque faite au chapitre 2 sur le fait que la quantité du bruit additif qui affecte les canaux de l'image polarimétrique est approximativement la même.

L'image de Stokes correspondante est illustrée sur la figure (3.9).

La première image  $S_0$  correspond à l'image intensité. On voit sur les 3 autres images particulièrement  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  qu'on perd énormément d'information et qu'on ne voit pratiquement pas la forme des 4 objets. Une fois le bruit estimé pour les quatre images intensités, les images du bruit sont ensuite calculées par la formule de l'équation (3.6). Ces images sont ensuite soustraites des canaux de Stokes en maintenant l'admissibilité physique. Les images filtrées résultantes sont illustrées sur la figure (3.10).

Comme pour les images simulées, on observe une amélioration significative sur les

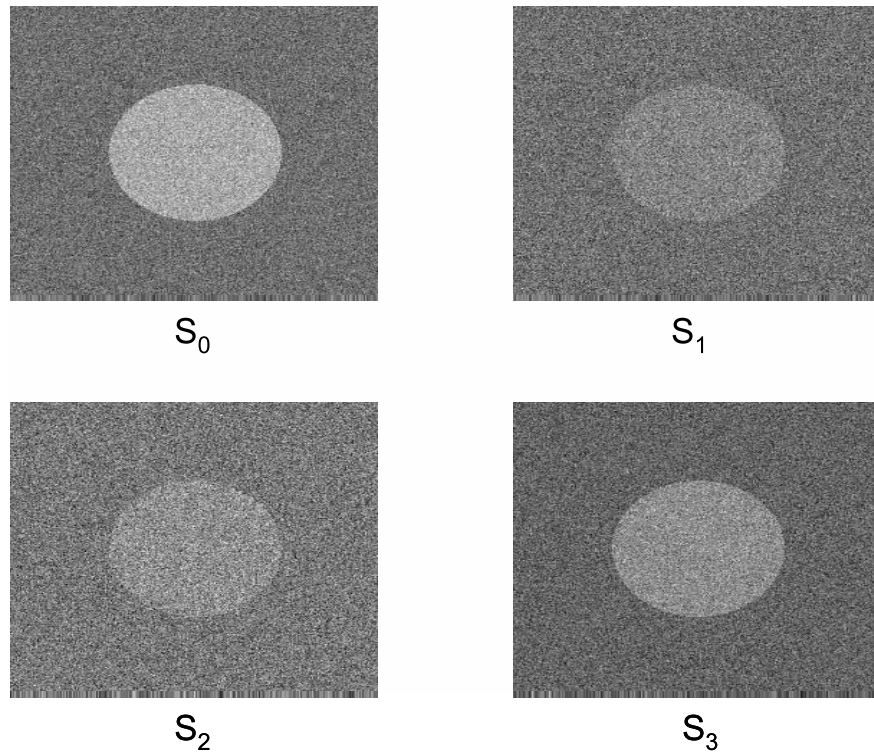


FIG. 3.5 – Image de Stokes bruitée

images de Stokes filtrées. Cela confirme l'intérêt et l'efficacité de notre approche.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit une procédure générale pour estimer et filtrer le bruit des images polarimétriques. L'intérêt majeur de notre méthode vient du fait que la validité physique des images codées en polarisation est maintenue.

Cette procédure a été appliquée avec succès sur des images de synthèse ainsi que sur des images réelles. Les résultats obtenus sont très convaincants et illustrent l'efficacité et l'intérêt de l'approche proposée.



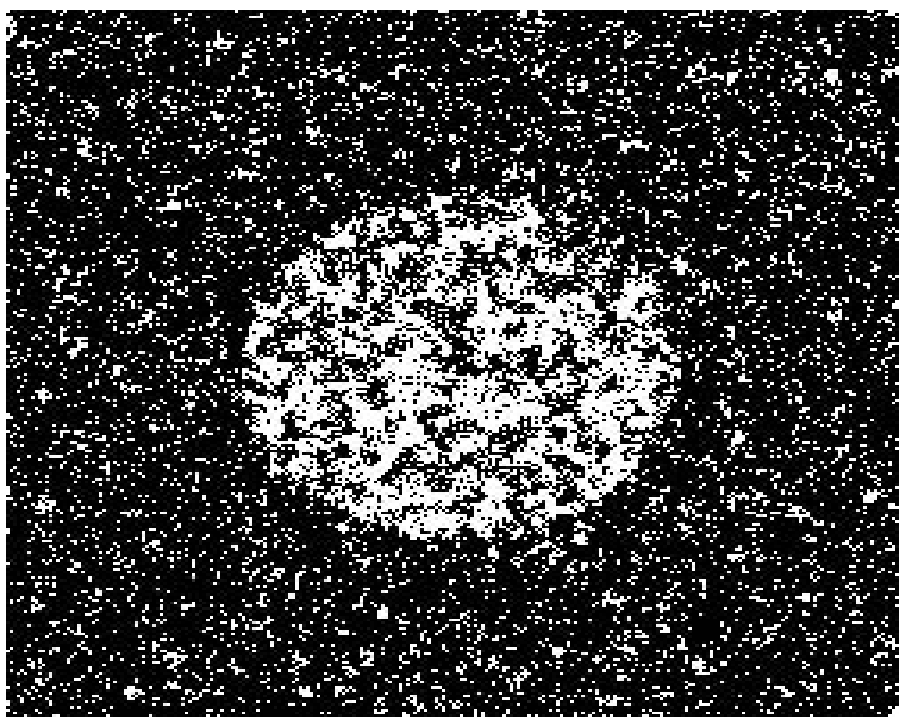


FIG. 3.6 – Image binaire du paramètre de la réalisabilité physique  $\alpha$

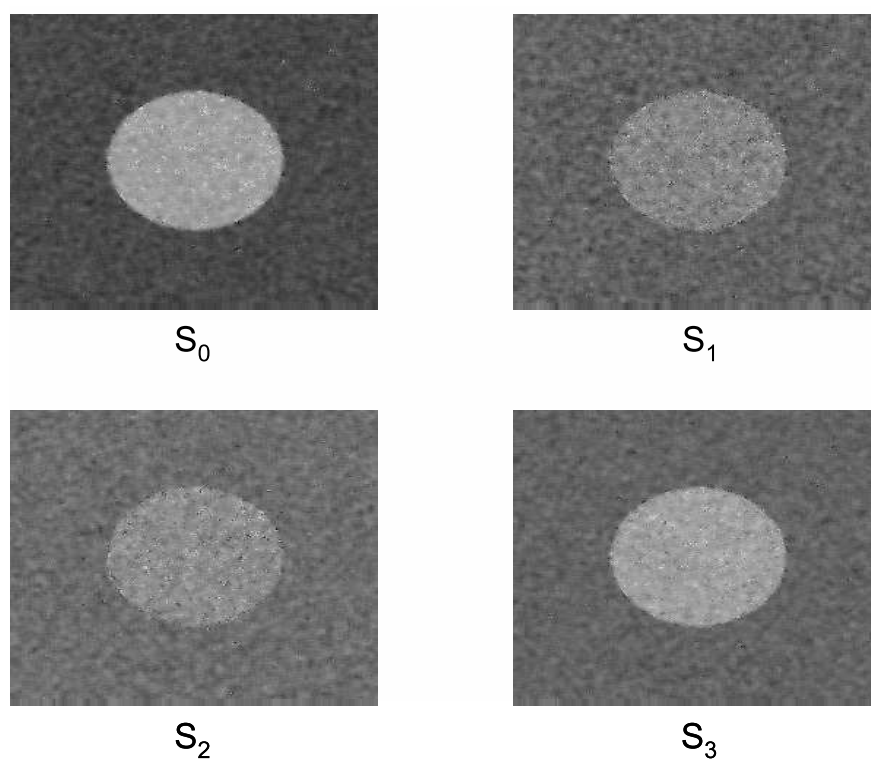


FIG. 3.7 – Image de Stokes filtrée du bruit

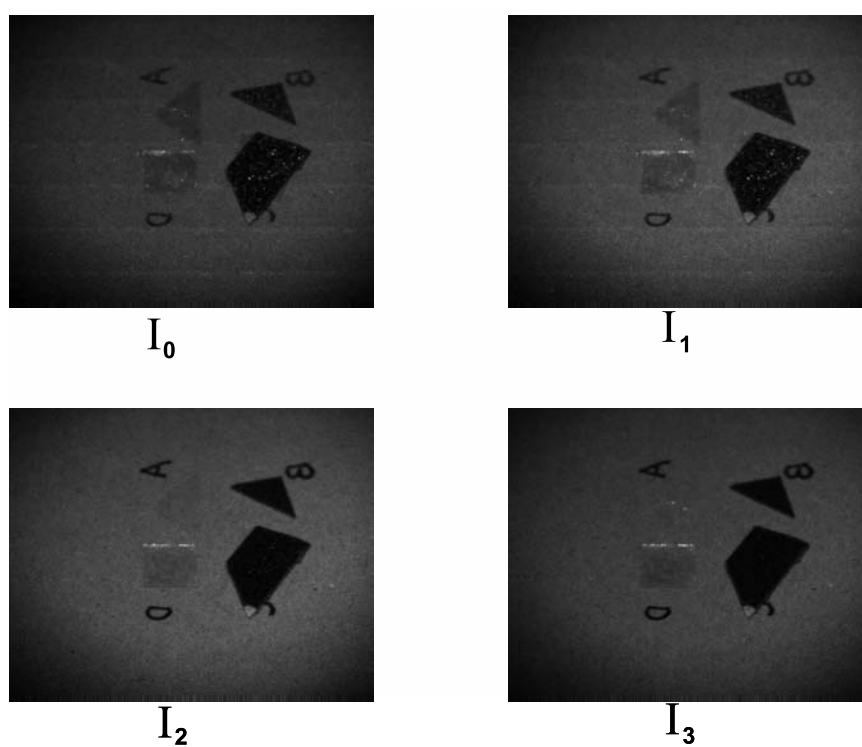


FIG. 3.8 – Images intensités acquises à l'aide d'un polarimètre classique

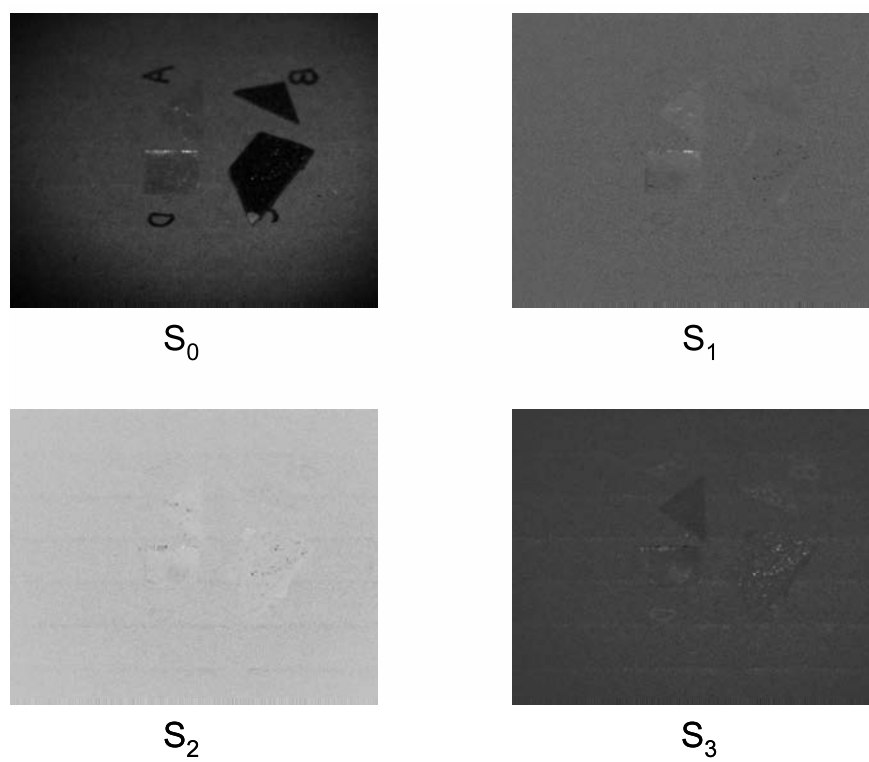


FIG. 3.9 – Image de Stokes correspondant aux images intensités de la figure (3.8) après inversion

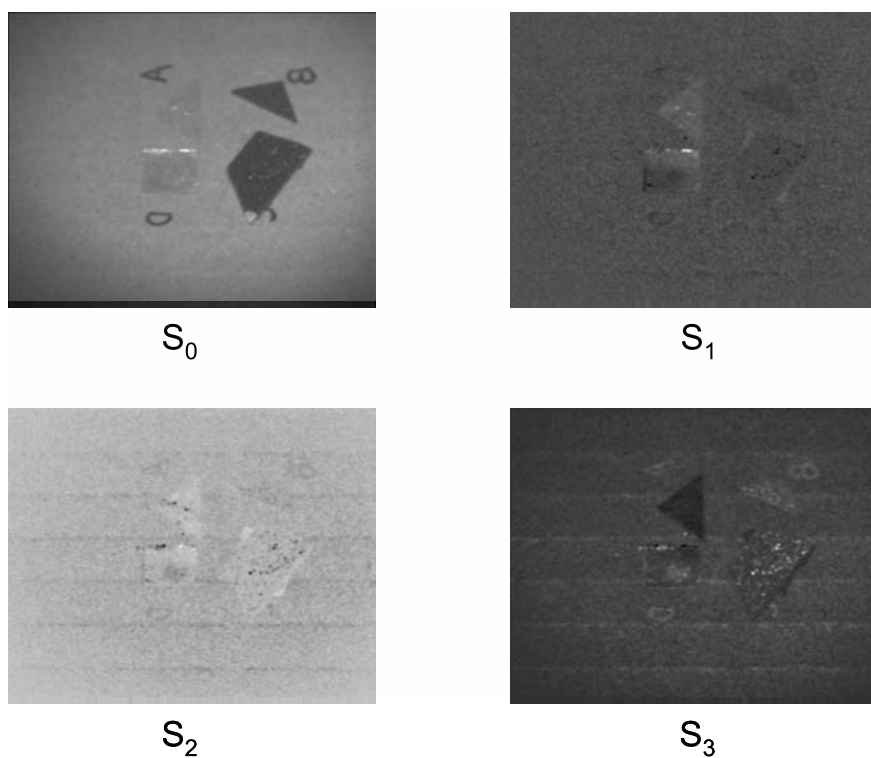


FIG. 3.10 – Image de Stokes filtrée du bruit

# Chapitre 4

## Segmentation et interprétation physique par prévisualisation couleur

### 4.1 Introduction et objectifs

L'importance de l'imagerie codée en polarisation vient de la richesse d'information qu'elle fournit sur la nature locale de l'objet. Les systèmes polarimétriques imageurs émergent comme une technique de vision très attractive permettant la compréhension des éléments constituant l'objet par leurs propriétés polarimétriques : biréfringence, dichroïsme, propriétés dépolarisantes, transmittance, etc. On trouve dans la littérature récente [21], [41], [40] des domaines d'applications divers de cette modalité d'imagerie : métrologie, imagerie médicale, télédétection, etc.

L'image codée en polarisation est vue comme une image multi dimensionnelle de dimension 4 pour les images de Stokes et 16 pour les images de Mueller. De plus, le contenu informationnel de cette structure multi-dimensionnelle est combiné de façon complexe entre les différents canaux de l'image. Ce qui rend délicat l'interprétation physique de ces données et nécessite le développement d'un outil adéquat permettant leur analyse et leur compréhension.

La représentation des canaux polarimétriques sous forme d'images en niveau de gris a été largement utilisée par le passé et reste toujours le moyen principal pour représenter ces images [79], [25], [21]. Cela rend difficile l'interprétation de l'information dans sa globalité. Peu de travaux ont adressé la mise en œuvre d'une approche synthétique qui produit une vue compacte et pratique pour l'observateur en terme d'interprétation du contenu physique de l'image. Néanmoins, on peut citer la correspondance polarisation-couleur proposée par Wolff [72] dans le but d'afficher les images à la sortie d'une caméra polarimétrique à cristaux liquides, et les références [58], [71] où les auteurs utilisent cette correspondance dans le contexte des images de différences polarimétriques pour améliorer la détection des cibles dans un milieu fortement diffusant.

Dans ce chapitre, nous proposons une représentation colorée *ad hoc* des images codées en polarisation comme une aide à leur interprétation en fonction de leur contenu physique [3]. Cette représentation utilise la décomposition polaire [52] pour le cas de l'imagerie de

Mueller et deux correspondances entre la sphère de Poincaré [7] et un espace couleur dans le cas de l'imagerie de Stokes. Une carte de segmentation est ensuite utilisée comme une information *a priori* couplée avec une égalisation d'histogramme intra-classes afin de permettre une meilleure distribution de l'information physique dans l'espace couleur choisi [4]. Le processus de segmentation est basé sur la famille des algorithmes des K-means [75], [49] dans lesquels les distances sont redéfinies selon les spécificités des paramètres de polarisation et l'espace couleur utilisé. Le but final de cette démarche est de proposer une carte couleur mono vue qui résume des informations qui sont dispersées sur 4 ou 16 canaux différents.

## 4.2 Algorithmes des K-means et des Fuzzy K-means

L'algorithme des K-means [49] permet de partitionner l'ensemble des  $N$  pixels de l'image, selon un critère choisi, en  $K$  classes  $C_1, C_2, \dots, C_k$ . Il s'agit ici d'une partition rigide, c'est-à-dire d'une collection de  $K$  sous ensembles où chaque pixel appartient à une et une seule classe. Soit  $U$  la matrice de partition qui définit l'appartenance de chaque pixel à une des classes :

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{K1} & u_{K2} & \dots & u_{KN} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

où  $u_{ij}$  désigne l'appartenance du pixel  $x_j$  à la classe  $C_i$

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \in C_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

On impose de plus les deux contraintes suivantes :

$$\sum_{i=1}^K u_{ij} = 1 \quad j = 1, N \quad (4.3)$$

$$\sum_{j=1}^N u_{ij} > 0 \quad i = 1, K \quad (4.4)$$

La première spécifie que tout pixel doit appartenir à une et une seule classe de la partition, et la deuxième précise qu'une classe doit avoir au moins un pixel. L'algorithme des K-moyenne se résume comme suit :

1. Initialiser les centres  $c_i^{(0)}$  de chaque classe  $C_i, i = 1, K$  en choisissant arbitrairement  $K$  pixels parmi les  $N$  donnés.

2. Calculer la partition initiale  $U(0)$  à l'aide de l'équation :

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x_j - c_i\| = \min_k \|x_j - c_k\| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad i = 1, K \quad j = 1, N \quad (4.5)$$

3.  $t=1$

4. Répéter

(a). Calculer les nouveaux centres  $c(t)$  en calculant les centroïdes des classes :

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^N u_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^N u_{ij}} \quad i = 1, K \quad (4.6)$$

(b). Calculer la nouvelle partition  $U(t)$  à l'aide de l'équation (4.5) ;

(c).  $t=t+1$ .

5. Jusqu'à  $U(t) = U(t-1)$  ou  $t \geq t_{max}$

L'algorithme des K-means peut être vu comme une minimisation de

$$F(U, c) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^K u_{ij} \|x_j - c_i\|^2 \quad (4.7)$$

pour lequel on cherche à trouver la partition qui minimise la distance entre les centres des classes et les pixels.

Cet algorithme utilisé pour les images monodimensionnelles peut être généralisé pour les images multicomposantes (par exemple : les images couleur). Le problème avec cet algorithme est que l'on force une partition rigide des pixels, qui en présence de bruit peut provoquer des instabilités. Pour éviter ce phénomène, une solution consiste en l'utilisation de la notion d'ensemble flou ou de partition floue pour fournir l'algorithme des K-means flous.

L'algorithme dit des Fuzzy K-means (K-means flous) est semblable au K-means sauf que la partition engendrée par les centres est floue, c'est-à-dire que le degré d'appartenance  $u_{ij}$  du pixel  $x_j$  à la classe  $C_i$  varie dans l'intervalle  $[0, 1]$  au lieu d'être 0 ou 1, comme pour les K-means. L'indice de performance que l'on désire minimiser dans cette variante est :

$$F_m(U, c) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^K (u_{ij})^m \|x_j - c_i\|^2 \quad (4.8)$$

où  $m > 1$  est un exposant qui fixe le niveau de flou de l'algorithme. La nouvelle variante est :

1. Initialiser les centres  $c(0)$  en choisissant aléatoirement  $K$  pixels parmi les  $N$  données.
2. fixer  $m$  et  $\varepsilon$



3. Calculer la partition initiale  $U(0)$  à l'aide de l'équation :

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^K \left( \frac{\|x_j - c_k\|}{\|x_j - c_i\|} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \quad i = 1, K \quad j = 1, N \quad (4.9)$$

4.  $t=1$

5. Répéter

(a). Calculer les nouveaux centres  $c(t)$  à l'aide de l'équation :

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^N (u_{ij})^m x_j}{\sum_{j=1}^N (u_{ij})^m} \quad i = 1, K \quad (4.10)$$

(b). Calculer la nouvelle partition  $U(t)$  en utilisant l'équation (4.9) ;

(c).  $t=t+1$ .

6. Jusqu'à  $\max_{ij} |u_{ij}(t) - u_{ij}(t-1)| \leq \varepsilon$  ou  $t \geq t_{max}$

L'algorithme se poursuit ainsi tant que la mise à jour des centres engendre une modification de la partition floue ou jusqu'à ce que le nombre des itérations maximal  $t_{max}$  soit atteint. La convergence est contrôlée en fixant un seuil  $\varepsilon$  sur l'élément de la matrice  $U$  qui a changé le plus. Si ce changement est inférieur au seuil fixé, on considère alors que l'algorithme a convergé.

Le paramètre  $m$  contrôle le degré de flou dans l'algorithme, il conditionne le taux d'appartenance à chaque classe dans la matrice  $U$ . On fixe généralement  $m$  à 2. Plus  $m$  augmente plus on permet aux pixels d'appartenir à différentes classes. Lorsque  $m$  tend vers 1 l'algorithme tend alors vers les K-means classique puisque la partition floue devient de plus en plus rigide. Il est important de rappeler que l'algorithme des Fuzzy K-means tout comme l'algorithme des K-means impose la contrainte de l'équation (4.3), à savoir que l'appartenance globale d'un pixel à l'ensemble des classes est toujours égale à 1.

L'algorithme des Fuzzy K-means généralise donc celui des K-means en étant moins sensible au bruit. Ceci permet dans bien des situations d'éviter de rester pris dans des minima locaux de la fonction objective  $F_m$ . L'algorithme est également moins dépendant de l'initialisation des centres. Bien que cet algorithme ait aussi ses propres limitations, il peut être adapté à tout espace utilisé euclidien ou non, c'est-à-dire que la distance utilisée pour le calcul des degrés d'appartenance ou des centroïdes dans chaque étape de l'algorithme est choisie selon la nature de l'espace utilisé. L'algorithme des Fuzzy K-means est choisi dans ce travail pour sa simplicité et son adaptabilité à toute métrique pour définir les distances entre les pixels.

## 4.3 Les espaces couleurs

### 4.3.1 Espace HSV

L'espace couleur HSV (Hue ou teinte, saturation, valeur) est une transformation non linéaire des composantes de l'espace RGB [33]. Il offre un maniement intuitif de la couleur en découplant la composante intensité de l'information chromatique (teinte et saturation). Les trois composantes de cet espace couleur sont :

1. La teinte (Hue ou tonalité) décrit la nuance de la couleur dans le spectre des couleurs. Rouge, jaune, et pourpre, par exemples, sont des teintes. Dans l'espace HSV la teinte varie de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  (figure (4.1)).

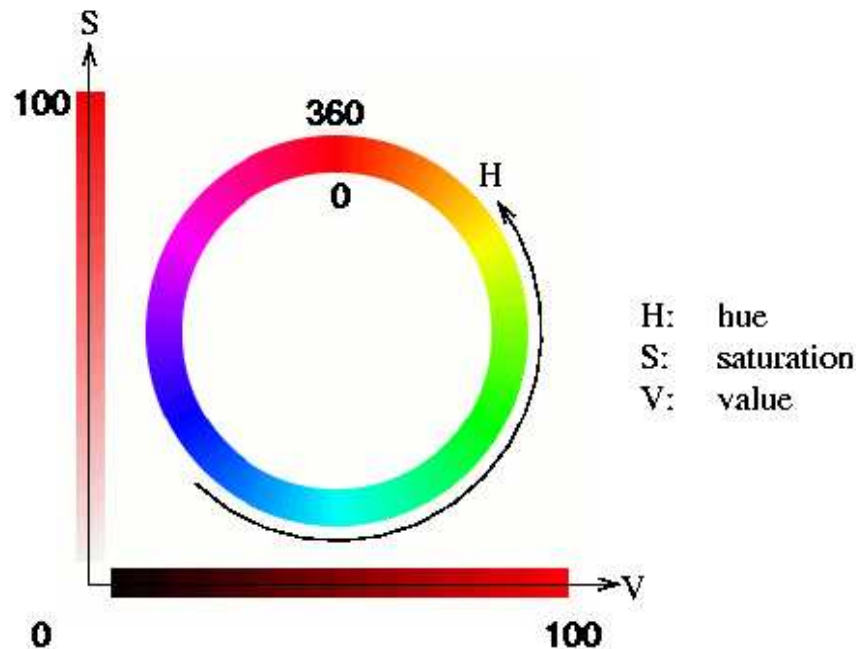


FIG. 4.1 – Teinte, saturation et valeur

2. La Saturation caractérise la pureté de la teinte par rapport à une référence blanche. Une couleur rouge sans aucun blanc est entièrement saturée. Si nous ajoutons un peu de blanc au rouge, la couleur se décale du rouge vers le rose. Dans ce cas la teinte reste toujours rouge mais devient moins saturée. Ceci est illustré dans la barre verticale de la figure(4.1). La saturation est le pourcentage de la teinte et varie entre 0 et 100. Un rouge pur qui n'a aucun blanc est saturé à 100%. Plus la saturation est faible, plus la couleur semble fanée.
3. La valeur est une valeur achromatique qui donne une mesure de la brillance (l'éclat). Elle varie de 0 à 100.  $V = 0$  est pour le noir et  $V = 100$  pour le blanc.

Le principal intérêt de ce modèle vient du fait que chaque composante (H, S ou V) peut être reliée à une grandeur physique qui peut être interprétée visuellement. Par exemple, les variations de la grandeur physique reliée à  $V$  sont reflétées par les variations de l'intensité des pixels dans l'image.

Les trois composantes HSV peuvent être représentées en coordonnées polaires par un cône où l'ensemble des couleurs synthétisables est représenté (figure (4.2)).

L'espace HSV peut également être visualisé en coordonnées cylindriques. La teinte  $H$  varie sur la circonférence du cylindre, la saturation est donnée par la distance jusqu'au centre d'une section circulaire. La valeur varie de la base jusqu'à la section supérieure du cylindre (figure(4.3)).

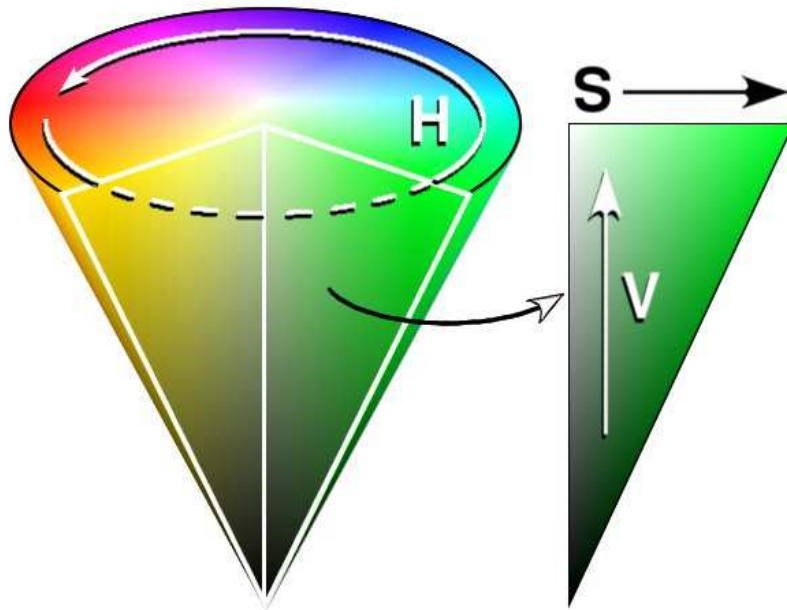


FIG. 4.2 – Cône HSV

### 4.3.2 Espace CIELAB

CIE Lab est un modèle de représentation des couleurs développé par le CIE (Commission Internationale de l'Eclairage), en 1976 [33]. Ce modèle de couleur a été créé comme un modèle absolu, indépendant du matériel, pour servir comme référence théorique. Ce modèle complet est utilisé pour décrire toute la gamme de couleurs visible par l'œil humain. Il découple la luminance  $L$  de la chrominance ( $a$  et  $b$ ) porteuse de l'information couleur. Chaque couleur de cet espace est décrite par trois critères physiologiques :

1. La composante  $L$  est la luminance, qui va de 0 (noir) à 100% (blanc).
2. La composante  $a$  représente la gamme de l'axe rouge (-127) à vert (128) en passant par le blanc (0) si la luminance vaut 100%
3. La composante  $b$  représente la gamme de l'axe jaune (-127) à bleu (128) en passant par le blanc (0) si la luminance vaut 100%

Comme le modèle  $Lab$  est un modèle à trois dimensions, il ne peut être représenté correctement que dans un espace sphérique. La figure(4.4) illustre la sphère Lab. Chaque axe de la sphère représente un paramètre  $L$ ,  $a$  ou  $b$ . Une caractéristique très utile de ce modèle, est que l'interprétation du premier paramètre  $L$  (luminance) est extrêmement intuitive : changer cette valeur est comme changer la luminosité d'un téléviseur.

Les relations non linéaires entre  $L$ ,  $a$  et  $b$  et l'espace RGB reproduisent la perception logarithmique de l'œil.

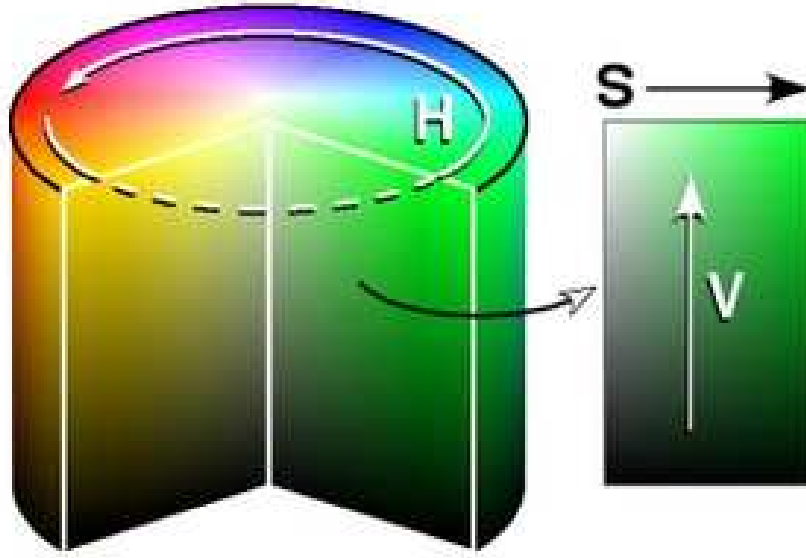


FIG. 4.3 – Cylindre HSV

Dans ce modèle les différences de couleurs que l'on perçoit correspondent aux distances mesurées colorimétriquement.

### 4.3.3 Des paramètres de Stokes à l'espace couleur

L'état de polarisation d'une onde lumineuse peut être décrit par le vecteur de Stokes  $S$  qui caractérise entièrement la moyenne temporelle des propriétés polarimétriques d'une radiation. Ce vecteur est défini par la combinaison des composantes complexes  $E_x$  et  $E_y$  du champ électrique dans les deux directions orthogonales  $x$  et  $y$  de la manière suivante [76](chapitre 1) :

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle \\ \langle E_x E_x^* \rangle - \langle E_y E_y^* \rangle \\ 2\text{Re}(\langle E_x^* E_y \rangle) \\ 2\text{Im}(\langle E_x^* E_y \rangle) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Il est évident que le vecteur de Stokes doit satisfaire les critères suivants :

$$\begin{aligned} S_0 &\geq 0 \\ S_0^2 &\geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Notons également que les facteurs géométriques de polarisation, c'est-à-dire le degré

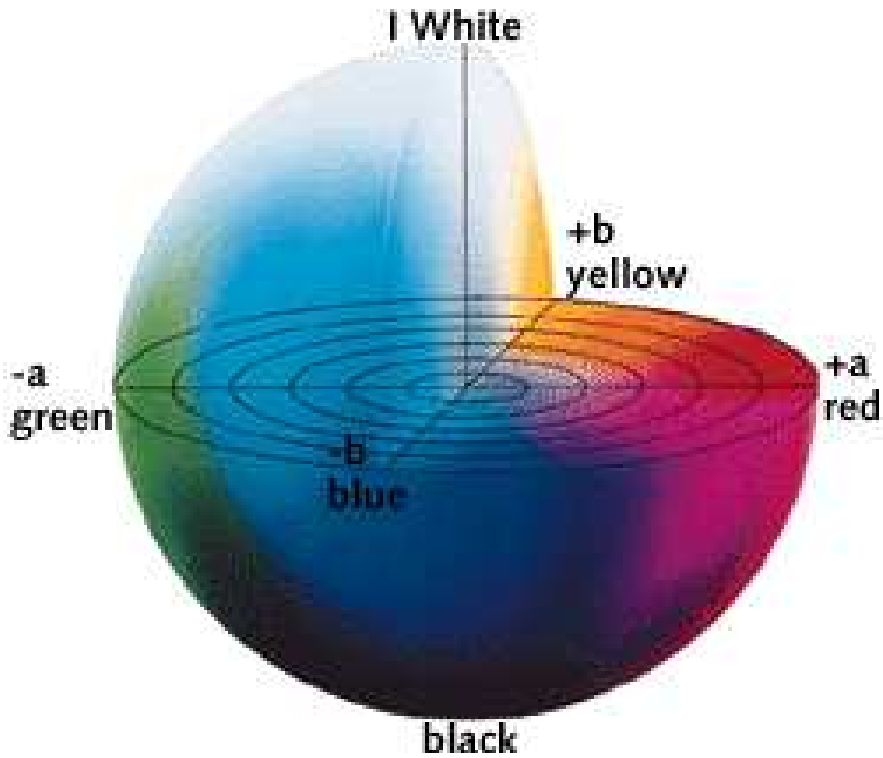


FIG. 4.4 – Sphère Lab

de polarisation ( $0 \leq DOP \leq 1$ ), l'orientation ( $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ ) et l'ellipticité ( $-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}$ ) peuvent être exprimés en fonction des paramètres de Stokes  $S_0, S_1, S_2$  et  $S_3$  par les relations suivantes :

$$DOP = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}$$

$$\psi = 0.5 \arctan\left(\frac{S_2}{S_1}\right) \quad (4.13)$$

$$\chi = 0.5 \arcsin\left(\frac{S_3}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}\right)$$

Si on normalise le vecteur de Stokes par le premier élément  $S_0$  ;  $\bar{S} = S/S_0 = [1 \quad \bar{S}_1 \quad \bar{S}_2 \quad \bar{S}_3]^t$ , alors le vecteur réduit  $[\bar{S}_1 \quad \bar{S}_2 \quad \bar{S}_3]^t$  définit un point sur la sphère de Poincaré [39] comme illustré dans la figure (4.5).

Pour analyser correctement l'information physique contenue dans les quatre canaux de Stokes , il est important de résumer toutes ces informations dans une seule image couleur en utilisant un algorithme adéquat. Ceci peut être réalisé par une correspondance entre la sphère de Poincaré et l'espace couleur HSV ou CIELAB<sup>(1)</sup>.

<sup>1</sup>Les figures (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4) sont prises de Wikipédia.org

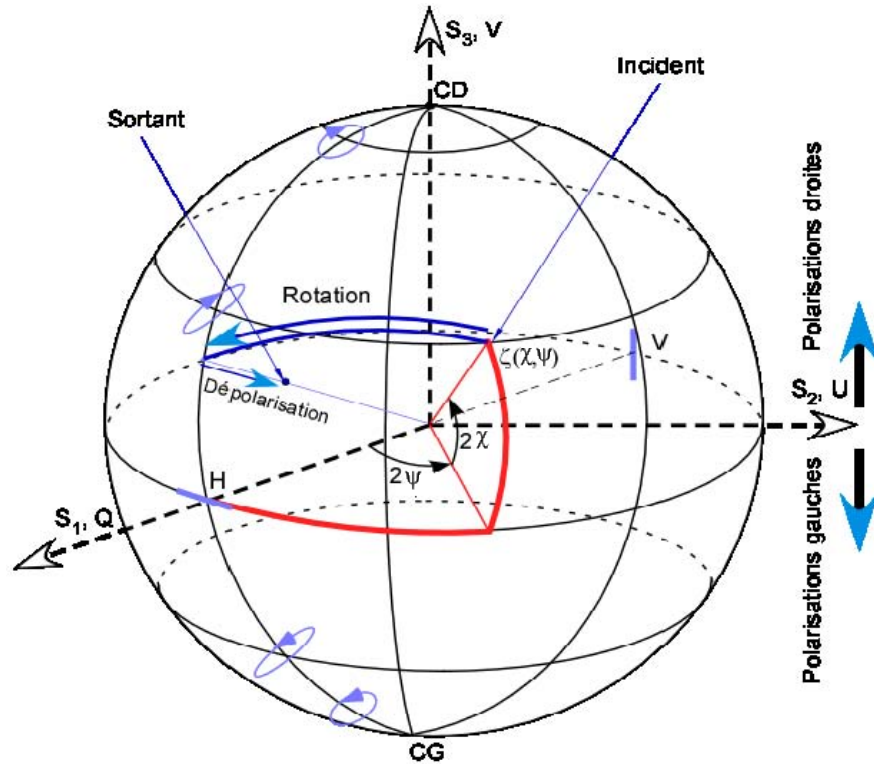


FIG. 4.5 – Sphère de Poincaré

### Sphère de Poincaré et espace couleur HSV

On définit la transformation qui associe à chaque point sur la sphère de Poincaré  $(\bar{S}_1 \ \bar{S}_2 \ \bar{S}_3)^t$  un point  $(H \ S \ V)^t$  dans le cylindre HSV par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 H &= \arctan \frac{\bar{S}_2}{\bar{S}_1} \\
 S &= (\sqrt{\bar{S}_1^2 + \bar{S}_2^2})^2 \\
 V &= 0.5(1 - \bar{S}_3)
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Cette correspondance n'est autre que la transformation géométrique entre une sphère et un cylindre, sauf pour la composante  $V$  où il a fallu tenir compte du fait que la composante  $\bar{S}_3$  du pôle nord et du pôle sud de la sphère de Poincaré valent respectivement 1 et  $-1$ .

L'application proposée peut être interprétée comme suit [3] : la valeur d'un pixel  $V$  reflète le sens de l'onde qui va des polarisations droites aux polarisations gauches, ce qui varie en terme de couleur du foncé au lumineux. L'extrémité des polarisations droites est représentée par le pôle sud de la sphère de Poincaré, ce qui correspond au point  $(0, 0, -1)$

sur la sphère, et l'extrémité des polarisations gauches est au pôle nord au point  $(0, 0, 1)$  de la sphère. L'axe  $\overline{S}_3$  est donc équivalent à l'axe des valeurs  $V$  normalisées sur le cylindre HSV qui varie de 0 à 1. Un point quelconque  $(\overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3)$  sur la sphère de Poincaré a évidemment son équivalent  $(H, S, V)$  dans le cylindre. Si on fixe sa valeur  $V$  alors ce point est représenté sur une circonférence circulaire ayant une orientation ou un angle  $H$  par rapport à l'origine (rouge sur le cylindre HSV) et un rayon ou une distance par rapport au centre  $S$ . Par conséquent, la saturation est définie comme le degré de polarisation  $DOP$  de la partie horizontale de l'onde et la teinte  $H$  est l'orientation de la partie polarisée de l'onde.

### Sphère de Poincaré et espace couleur Lab

Dans le cas de l'espace couleur Lab la transformation est plus simple puisque les deux espaces en question sont représentés géométriquement par des sphères [4]. Il suffit d'injecter une sphère dans l'autre à l'aide d'une mise à l'échelle adéquate. On plonge donc la sphère de Poincaré dans la sphère Lab en utilisant les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} L &= 256 \frac{\overline{S}_3 - \min \overline{S}_3}{\max \overline{S}_3 - \min \overline{S}_3} \\ a &= -127 + 255 \frac{\overline{S}_2 - \min \overline{S}_2}{\max \overline{S}_2 - \min \overline{S}_2} \\ b &= -127 + 255 \frac{\overline{S}_1 - \min \overline{S}_1}{\max \overline{S}_1 - \min \overline{S}_1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Cette transformation permet de varier les valeurs des pixels de l'image LAB entre les minima et maxima permis des paramètres  $L$ ,  $a$  et  $b$  dans la sphère Lab. La valeur 256 du paramètre  $L$  correspond à 100% dans la sphère.

L'interprétation de ces transformations est similaire à celle donnée dans le cas de l'espace couleur HSV. La composante  $\overline{S}_3$  est équivalente à la luminance dans l'espace Lab. Cet élément caractérise la composante intensité. Le choix de la correspondance entre les éléments des deux espaces, sphère de Poincaré et sphère Lab, est fait en fonction des axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ .

## 4.4 Prévisualisation couleur des images codées en polarisation

### 4.4.1 Classification des images codées en polarisation

La raison pour laquelle on utilise le processus de segmentation, est la classification d'une image en différentes régions. Chaque région correspond à une caractéristique physique de la scène imagée. La segmentation des images multicomposantes peut devenir compliquée quand l'information physique est étendue sur plusieurs canaux pour chaque pixel de l'image [21], [79], [41], [40]. Pour cela l'introduction de la notion de couleur afin de représenter cette modalité d'images nous permettra de procéder à la classification des

images couleurs correspondantes. Cela permettra de visualiser la distribution de cette information physique dans une seule image au lieu de quatre, à l'aide de la représentation couleur.

### Classification dans le système HSV

L'algorithme de classification utilisé dans l'espace HSV est basé sur la segmentation des images HSV de Chi Zhang présentée dans [80]. Les propriétés cycliques de la composante  $H$  sont un atout important pour la segmentation des images dans l'espace couleur HSV. Afin d'étudier la segmentation d'une telle image, la composante  $H$  doit être parfaitement analysée. La notion de distance doit être redéfinie pour  $H$  en tenant compte de ses propriétés cycliques.

On définit la distance entre deux teintes  $H_1$  et  $H_2$  par la formule suivante :

$$d(H_1, H_2) = \begin{cases} |H_1 - H_2| & \text{si } |H_1 - H_2| \leq \pi \\ 2\pi - |H_1 - H_2| & \text{si } |H_1 - H_2| > \pi \end{cases} \quad (4.16)$$

Le calcul de la distance entre deux teintes tient compte du chemin le plus court entre les deux teintes. L'orientation est calculée selon le sens direct (sens anti-horaire). On définit donc la distance directionnelle entre deux teintes  $H_1$  et  $H_2$  par la formule suivante :

$$\bar{d}(H_1, H_2) = \begin{cases} H_2 - H_1 & \text{si } |H_2 - H_1| \leq \pi \\ H_2 - H_1 - 2\pi & \text{si } |H_2 - H_1| \geq \pi, H_2 \geq H_1 \\ 2\pi - (H_1 - H_2) & \text{si } |H_2 - H_1| \geq \pi, H_1 \geq H_2 \end{cases} \quad (4.17)$$

On appelle intervalle  $[H_1, H_2]$  entre deux valeurs  $H_1$  et  $H_2$  dans l'espace des teintes, l'ensemble des points tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } |H_2 - H_1| \leq \pi \\ \\ \text{Si } |H_2 - H_1| \geq \pi \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} [H_1, H_2] = \{H \mid H_1 \leq H \leq H_2\} \\ \\ [H_1, H_2] = \{H \mid \max(H_1, H_2) \leq H \leq 2\pi \text{ ou } 2\pi \leq H \leq \min(H_1, H_2)\} \end{array} \quad (4.18)$$

et le milieu  $H_M$  d'un intervalle par :

$$H_M = \begin{cases} (H_1 + H_2)/2 & |H_1 - H_2| \leq \pi \\ (H_1 + H_2)/2 - \pi & |H_1 - H_2| \geq \pi, (H_1 + H_2)/2 \geq \pi \\ (H_1 + H_2)/2 + \pi & |H_1 - H_2| \geq \pi, (H_1 + H_2)/2 \leq \pi \end{cases} \quad (4.19)$$



A partir de ces définitions, le centre d'un ensemble de points  $x_1, x_2, \dots, x_N$  dans l'espace des teintes appartenant à un intervalle  $[H_1, H_2]$  est donné par :

$$x_c = H_M + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{d}(H_M, x_j) \quad (4.20)$$

Il est clair que  $x_c \in [H_1, H_2]$  et  $\sum_{j=1}^N \bar{d}(x_c, x_j) = 0$ . L'équation (4.20) est définie dans l'espace euclidien.

L'algorithme de classification adapté dans l'espace des teintes est l'algorithme des Fuzzy K-means décrit plus haut en remplaçant la distance euclidienne par la distance directionnelle et les centres utilisés dans l'algorithme classique par les centres de l'équation (4.20). Le centre utilisé dans le nouvel algorithme se calcule donc par la formule :

$$c(i) = H_M(i) + \frac{1}{N} \frac{\sum_{j=1}^N u_{ij}^m \bar{d}(H_M, x_j)}{\sum_{j=1}^N u_{ij}^m} \quad (4.21)$$

où  $(u_{ij})_{i=1,K,j=1,N}$  sont les éléments de la fonction de partition définie dans l'algorithme des Fuzzy K-means et  $m$  est l'exposant qui fixe le niveau de flou de l'algorithme. Appelons par HSV-means l'algorithme des Fuzzy K-means adapté à l'espace des teintes [1].

Parmi les trois composantes de la représentation HSV, H et V sont les plus importantes [80]. En effet, à cause des variations de l'intensité de la lumière, la luminance d'une même surface n'est jamais uniforme. Cependant la teinte  $H$  déterminée par les propriétés réfléchissantes d'un objet est une composante relativement stable. De même pour une image ayant peu de contraste colorimétrique, on fait toujours appel à l'intensité ou à la valeur  $V$ . La matrice de répartition  $U$  est utilisée ici pour combiner ces deux canaux.

On observe que les composantes de l'image HSV sont indépendantes. Ainsi les canaux  $H$  et  $V$  de l'image peuvent être traités séparément avant d'être combinés. Ce choix n'est pas crucial, en effet, d'après la transformation de l'équation (4.14) qui associe à chaque point de la sphère de Poincaré un point sur le cylindre HSV, la totalité de l'information polarimétrique est contenue dans les composantes  $H$  et  $V$  correspondantes. La composante  $S$  est donc redondante en terme d'information.

La segmentation de l'image HSV se fait alors de la manière suivante [80] :

L'algorithme des Fuzzy K-means est appliqué d'abord à la composante  $V$  de l'image  $HSV$ , on obtient donc les centres  $V_{c1}, V_{c2}, \dots, V_{cK}$  des  $K$  classes résultantes. Pour chaque pixel de l'image  $V$ , le degré d'appartenance aux classes est donné par :

$$U_1^V(V(x, y)), U_2^V(V(x, y)), \dots, U_K^V(V(x, y))$$

où  $V(x, y)$  est la composante  $V$  du pixel  $(x, y)$ . La somme des  $K$  degrés d'appartenance vaut 1. Dans la deuxième étape on applique l'algorithme des HSV-means à la composante  $H$ , ce qui donne les centres  $H_{c1}, H_{c2}, \dots, H_{cK}$  des  $K$  classes résultantes. On calcule ensuite le degré d'appartenance des pixels à chaque classe par :

$$U_1^H(H(x, y)), U_2^H(H(x, y)), \dots, U_K^H(H(x, y))$$

où  $H(x, y)$  est la composante  $H$  du pixel  $(x, y)$ . La somme des  $U_H$  vaut également 1.

A ce stade, chaque pixel a  $2K$  éléments d'appartenance. On combine ensuite ces valeurs pour former le champ vectoriel à 2 dimensions

$$\psi(x, y) = (\max_{i=1,K} U_i^V(V(x, y)), \max_{i=1,K} U_i^H(H(x, y))) \quad (4.22)$$

On applique ensuite l'algorithme de Fuzzy K-means classique sur  $\psi$ , ce qui nous donne la classification finale de l'image HSV.

L'algorithme de segmentation dans l'espace HSV est ainsi achevé.

### Classification dans le système CIELAB

L'algorithme de segmentation en Lab est moins exigeant que dans l'espace HSV [4]. Le calcul des centres ou des fonctions d'appartenance dans l'algorithme des Fuzzy K-means utilise une distance qui est généralement euclidienne ou équivalente. Les composantes L, a et b d'un pixel d'une image Lab forment un point de la sphère Lab. Il est alors plus naturel d'utiliser le plus petit arc du grand cercle qui relie deux points comme distance dans notre algorithme de segmentation [2].

Si  $X_1 = [L_1, a_1, b_1]$  et  $X_2 = [L_2, a_2, b_2]$  sont deux points sur la sphère Lab, on définit la latitude  $\delta$  et la longitude  $\lambda$  de ces deux points par :

$$\begin{aligned} \delta_i &= \arctan \frac{a_i}{b_i} + \pi \mu_0(-b_i) \cdot \text{sign}(a_i) & i = 1, 2 \\ \lambda_i &= \arccos \frac{L_i}{\sqrt{L_i^2 + a_i^2 + b_i^2}} & i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

où  $\mu_0(x)$  est la fonction de Heaviside et  $\text{sign}(x)$  la fonction signe (voir annexe A).

La distance du grand cercle entre  $X_1$  et  $X_2$  est définie par :

$$d(X_1, X_2) = 2.R. \arcsin \sqrt{\sin^2\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin^2\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)} \quad (4.24)$$

$R$  est le rayon de la sphère Lab. Cette distance remplace la distance euclidienne du Fuzzy K-means. L'algorithme résultant qu'on nomme Lab-means [4] avec la nouvelle distance est utilisé par la suite pour la segmentation de l'image Lab.

#### 4.4.2 Applications et algorithme de représentation couleur

Nous appliquons cette méthode sur trois images de Stokes de tissus biologiques <sup>(2)</sup>. La première est celle d'une coupe histologique de l'os imagée à 650nm (figure (4.6)), la deuxième concerne un vaisseau sain (figure (4.14)) et la troisième un vaisseau pathologique figure(4.15)) imagées sous les mêmes conditions [3].

Chaque pixel de l'image (4.6) a quatre composantes  $[S_0, S_1, S_2, S_3]^t$ . L'image  $S_0$  représente l'image intensité classique. Les représentations colorées dans les espaces HSV et Lab après transformations (cf.équations (4.14) et (4.15)) sont données dans les figures (4.7) et (4.8).

Les résultats des segmentations avec les algorithmes HSV-means et Lab-means sont donnés par les figures (4.9) et (4.10) pour  $K = 4$  classes

---

<sup>2</sup>Images fournies par Antonello De Martino, LPICM, UMR 7647, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

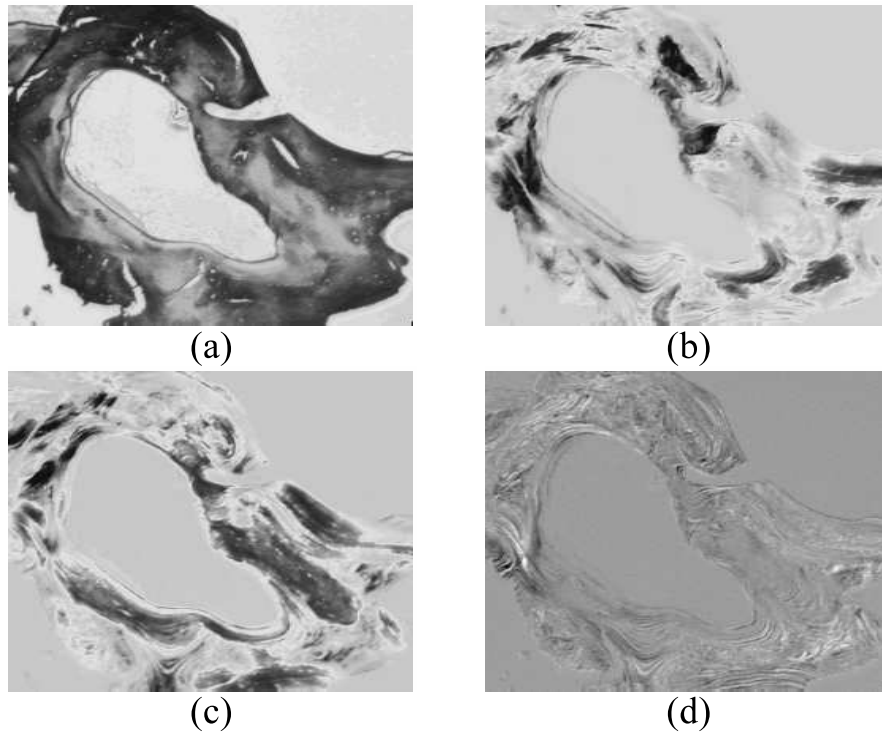


FIG. 4.6 – Image de Stokes d’une coupe histologique d’un os imagée à 650nm. (a).  $S_0$ , (b).  $S_1$ , (c).  $S_2$ , (d).  $S_3$

### Représentation colorée

On observe que la luminance des canaux intensités  $V$  dans l’image HSV (figure 4.7.c) et  $L$  dans l’image Lab (figure 4.8.a) est mal distribuée sur chaque classe. On utilise alors la carte de segmentation obtenue auparavant comme une information *a priori* afin de permettre une meilleure distribution de l’information dans l’espace couleur.

Une fois que les cartes de segmentations sont obtenues, les différents masques des classe  $C_k$  sont utilisés pour extraire les valeurs de luminance correspondantes. Sur chaque ensemble, on applique une égalisation d’histogramme afin de redistribuer uniformément les intensités dans chaque classe et de refléter au mieux les variations intra-classes. Les nouvelles valeurs intensités sont finalement assignées au canal intensité. La figure (4.11) montre le résultat de l’égalisation des histogrammes intra-classes des canaux intensités pour les deux espaces couleurs.

Finalement, les trois composantes colorimétriques sont utilisées pour générer une image couleur  $RGB$  pour l’affichage. L’algorithme proposé est appliqué à l’image de la coupe histologique de l’os. Le résultat final est représenté dans la figure (4.12) pour l’espace HSV et dans la figure (4.13) pour l’espace Lab.

L’algorithme proposé se résume en ces quelques lignes :

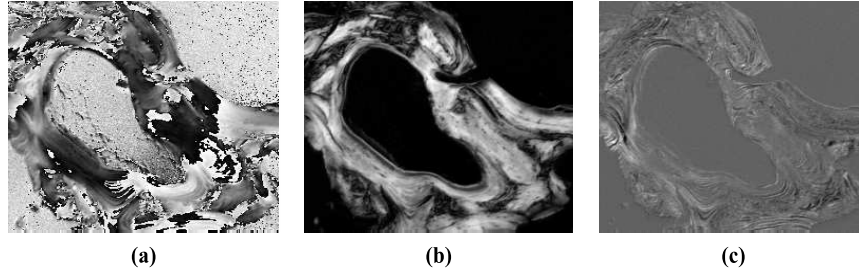


FIG. 4.7 – Image HSV de la coupe histologique de l'os. (a). teinte, (b). saturation, (c).valeur

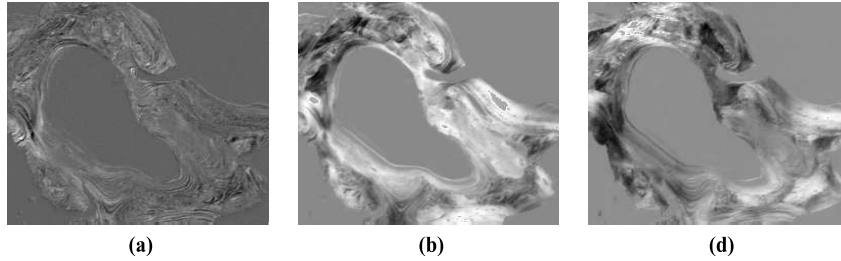


FIG. 4.8 – Image Lab de la coupe histologique de l'os. (a). Luminance, (b). canal  $a$ , (c).canal  $b$

- Normalisation des trois dernières composantes de Stokes par la première  $S_0$
- Correspondance entre la sphère de Poincaré et l'espace couleur considéré.
- Segmentation de l'image couleur résultante en utilisant l'algorithme des Fuzzy K-means adapté à chaque espace.
- Egalisation des histogrammes correspondant à chaque classe dans le canal intensité de chaque image couleur
- Remplacement de la composante intensité de l'image par la composante traitée à l'étape précédente.
- Transformation de l'image couleur vers une image RGB
- Affichage de l'image RGB.

La prévisualisation couleur est un moyen compact pour représenter la variation des propriétés physiques d'une scène présentée initialement dans quatre canaux différents. Dans l'image résultante chaque couleur correspond à une information physique qui peut être interprétée selon l'espace couleur choisi.

Les résultats de prévisualisation sur les deux autres images sont donnés sur les figures (4.16) et (4.17).

Aucune des deux méthodes proposée (HSV ou Lab) n'est à privilégier par rapport à l'autre : La prévisualisation HSV est plus précise pour l'image de Stokes de la figure (4.6), mais l'est moins pour l'image de Stokes du vaisseau pathologique (figure (4.17)).

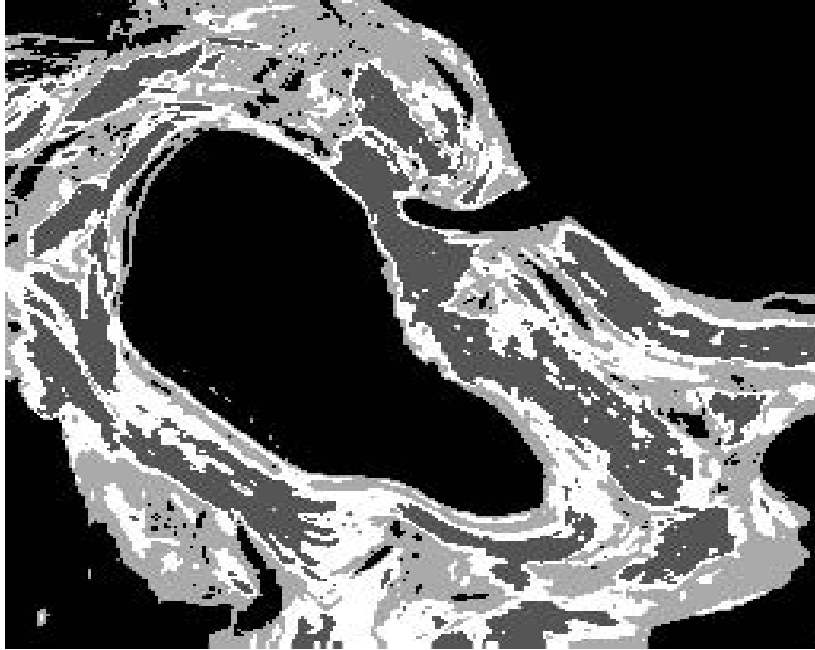


FIG. 4.9 – Carte de segmentation pour 4 classes, résultat de l’application de l’algorithme des HSV-means sur l’image HSV de la coupe histologique de l’os

Cependant, au moins pour les cas considérés, il y a toujours une prévisualisation qui fournit une représentation couleur utile pour l’interprétation qualitative de l’information polarimétrique. Ceci montre clairement l’intérêt de la méthode proposée.

## 4.5 De l’imagerie de Mueller à l’espace couleur

L’algorithme utilisé pour la représentation couleur des images de Mueller est très semblable à celui présenté pour les images de Stokes. Une étape de réduction de la dimensionnalité est d’abord nécessaire pour passer d’une dimension 16 à une dimension 3.

On a vu dans le chapitre 1 que toute matrice de Mueller  $M = (m_{ij})_{i,j=0,1,2,3}$  peut s’écrire comme le produit de trois matrices de Mueller : un diatténuateur  $M_D$ , un déphaseur  $M_R$  et un dépolariseur  $M_\Delta$ . Pour chacune de ces trois matrices, on définit un coefficient caractéristique : la diatténuation  $D$  pour  $M_D$ , l’angle de déphasage  $R$  pour  $M_R$  et le facteur de dépolarisation moyen  $\Delta$  pour  $M_\Delta$ . Ces trois coefficients sont définis par :

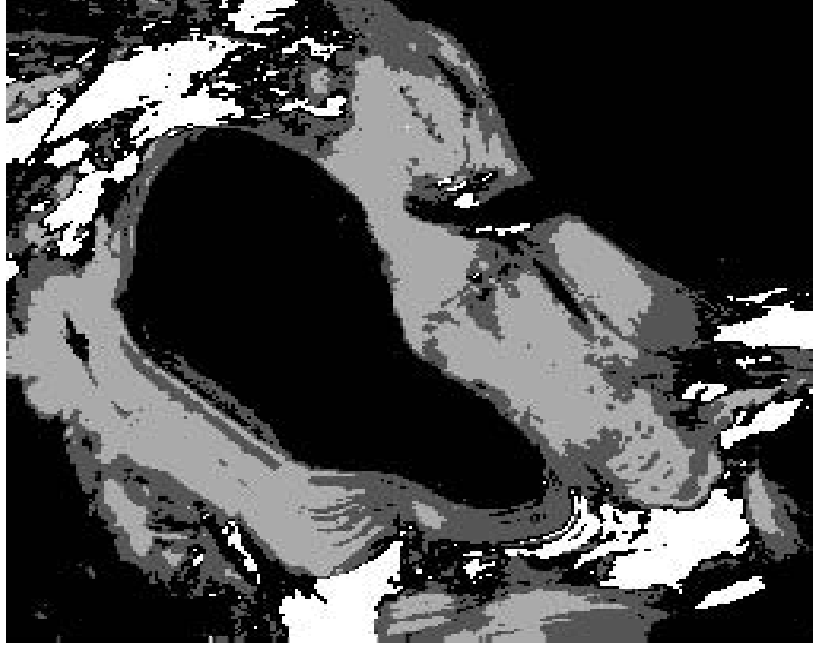


FIG. 4.10 – Carte de segmentation pour 4 classes, résultat de l'application de l'algorithme des Lab-means sur l'image Lab de la coupe histologique de l'os

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{m_{00}} \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} & 0 \leq D \leq 1 \\
 R &= \cos^{-1} \left[ \frac{M_R}{2} - 1 \right] & 0 \leq R \leq \pi \\
 \Delta &= 1 - \frac{\text{trace}(|M_{\Delta}-1|)}{3} & 0 \leq \Delta \leq 1
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

A chaque pixel de l'image de Mueller de dimension 16, on associe un pixel de dimension 3, ayant comme composantes les coefficients définis dans l'équation (4.25). Les figures (4.18) et (4.19) illustrent cette correspondance pour l'image de l'os.

Il reste à définir la correspondance entre l'espace  $(D, R, \Delta)$  et l'espace couleur HSV. On utilise la correspondance suivante :

- Le retard  $R$  décrit la rotation des composantes du champ électrique de la lumière incidente sur l'objet. Ses valeurs angulaires sont associées au canal  $H$  des teintes dans l'espace couleur HSV.
- On associe la composante polarimétrique  $D$  au canal S de l'espace couleur HSV.
- La dépolarisation  $\Delta$  est affectée à la troisième composante  $V$ .

Les équations d'équivalences entre les deux espaces sont :

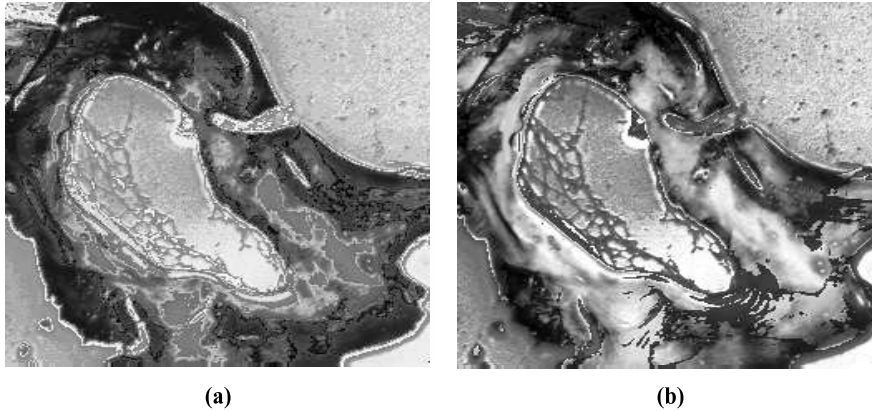


FIG. 4.11 – Nouveau canal intensité après égalisation d’histogramme. (a) dans le cas HSV, (b) dans le cas Lab

$$\begin{aligned}
 H &= R \\
 S &= D \\
 V &= \Delta
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

## 4.6 Segmentation des images de Mueller par HSV-means

Le résultat de segmentation par l’algorithme HSV-means pour 4 classes est donné en figure (4.20).

Comme pour le cas des images de Stokes, on égalise les histogrammes des valeurs de  $V$  à l’intérieur de chaque classe (figure (4.21)).

A partir de l’image HSV obtenue, on génère l’image RGB avant de l’afficher. La figure (4.22) montre le résultat en couleur pour l’image de Mueller de l’os.

L’algorithme de prévisualisation couleur pour les images de Mueller est le suivant :

- Décomposition polaire de la matrice de Mueller attachée à chaque pixel : passage de 16 images à 3 images.
- Correspondance entre l’image codée en polarisation et l’espace couleur HSV.
- Segmentation de l’image couleur résultante en utilisant l’algorithme des HSV-means.
- Egalisation des histogrammes correspondant à chaque classe dans le canal intensité de l’image couleur.
- Remplacement de la composante intensité de l’image par la composante traitée à l’étape précédente.
- Transformation de l’image HSV à l’image RGB
- Affichage du résultat en RGB.

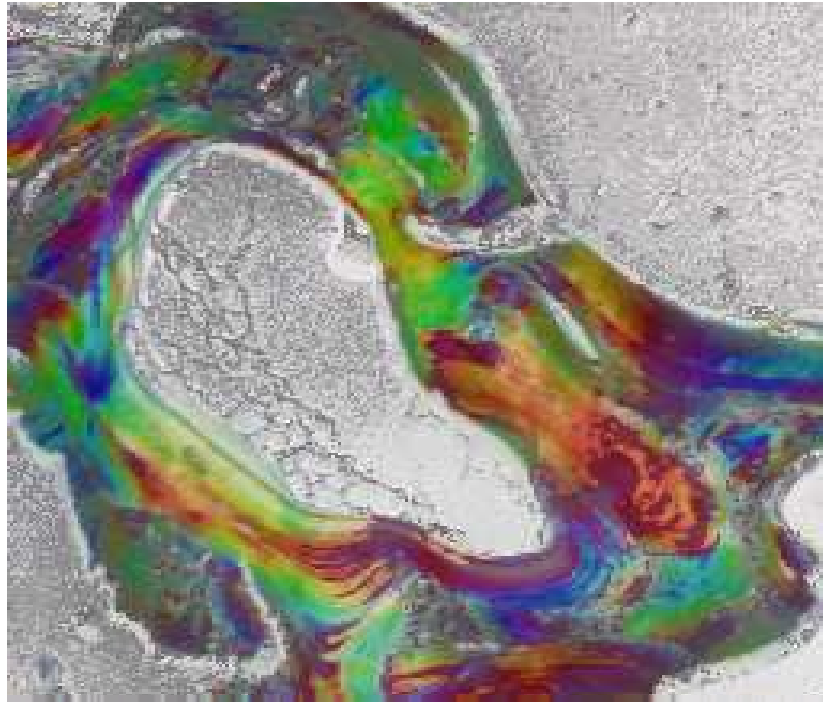


FIG. 4.12 – Représentation en couleur HSV de l'image de Stokes. L'affichage est en RGB

## 4.7 Segmentation des images de Mueller en utilisant les quaternions

La partie non dépolarisante de la matrice de Mueller peut toujours être représentée par un quaternion (cf. chapitre 1). Cela permet de passer d'une image de Mueller de dimension 16 à une structure quaternionique complexe de dimension 4.

Si on prend la distance euclidienne pour définir la distance entre deux quaternions, l'algorithme des Fuzzy K-means nous permet de générer la carte de segmentation de la matrice de Mueller non dépolarisante.

Soit  $U^{nd}$  la fonction d'appartenance obtenue. Si on note par  $U^d$  la fonction d'appartenance qui résulte de la segmentation par Fuzzy K-means de l'image dépolarisation  $\Delta$ , la combinaison des deux fonctions d'appartenance donne le champ vectoriel suivant :

$$U = (\max_{i=1,K} U_i^{nd}, \max_{i=1,K} U_i^d) \quad (4.27)$$

$K$  est le nombre de classes choisies. L'application de l'algorithme des Fuzzy K-means sur le champ 2-dimensionnel  $U$  nous donne la carte de segmentation finale.

Les figures (4.23) et (4.24) montrent les cartes de segmentations pour 4 et 6 classes de l'image de Mueller de l'os en utilisant le nouveau formalisme introduit au chapitre 1.



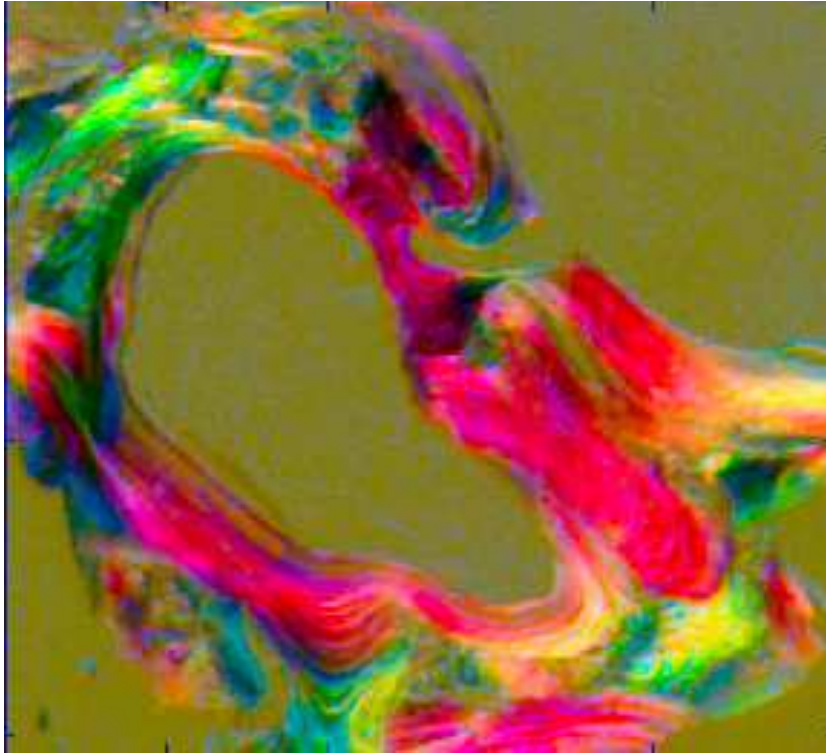


FIG. 4.13 – Représentation en couleur LAB de l'image de Stokes. L'affichage est en RGB

Comme pour la segmentation par HSV-means, on égalise les histogrammes des valeurs de  $\Delta$  à l'intérieur de chaque classe selon la carte de segmentation de la figure (4.23), on attribue ensuite la nouvelle valeur de  $\Delta$  au canal  $V$ . A partir de l'image HSV obtenue, on génère l'image RGB illustrée dans la figure (4.25) :

Le résultat final est semblable à celui de la prévisualisation couleur en HSV. Ceci montre l'intérêt que porte la segmentation quaternionique de l'image de Mueller.

## 4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle approche pour interpréter le contenu physique des images codées en polarisation basée sur la prévisualisation couleur. La correspondance entre les images polarimétriques et les espaces couleurs permet de synthétiser le maximum d'informations dans une prévisualisation couleur qui permet de distinguer visuellement la distribution des caractéristiques polarimétriques sur les pixels de l'image. Par conséquent, l'interprétation qualitative des propriétés de l'objet en terme du contenu physique est facilité. L'intérêt de cette méthode est d'utiliser la carte de segmentation dans le but d'avoir un résultat couleur qui préserve les variations des propriétés physiques à travers la scène. Cette méthode est validée sur des images de Stokes et de Mueller de

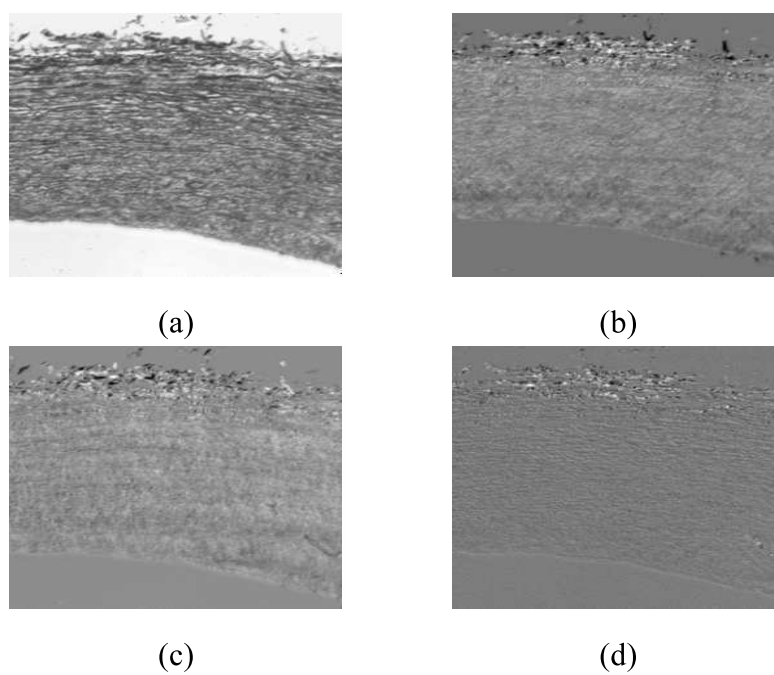


FIG. 4.14 – Image de Stokes d'un vaisseau sain

tissus biologiques. Notre objectif futur est de choisir la palette de couleurs qui permet la meilleure interprétation des propriétés polarimétriques dans l'image.

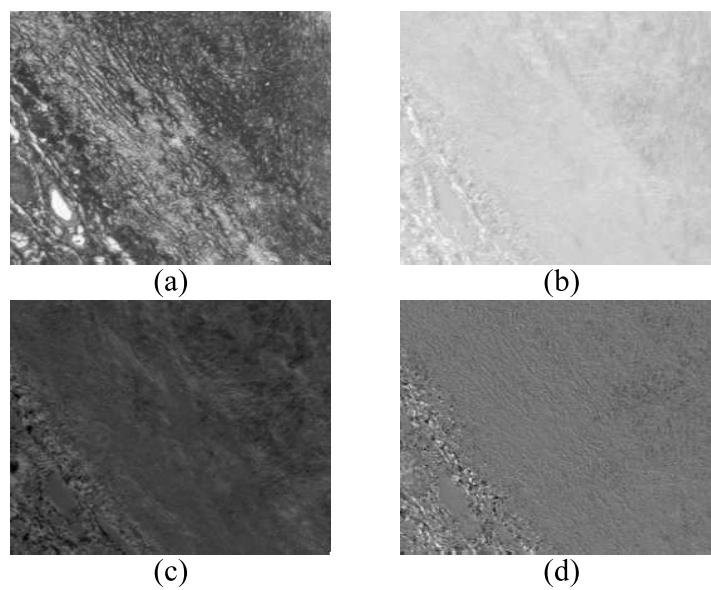


FIG. 4.15 – Image de Stokes d'un vaisseau pathologique

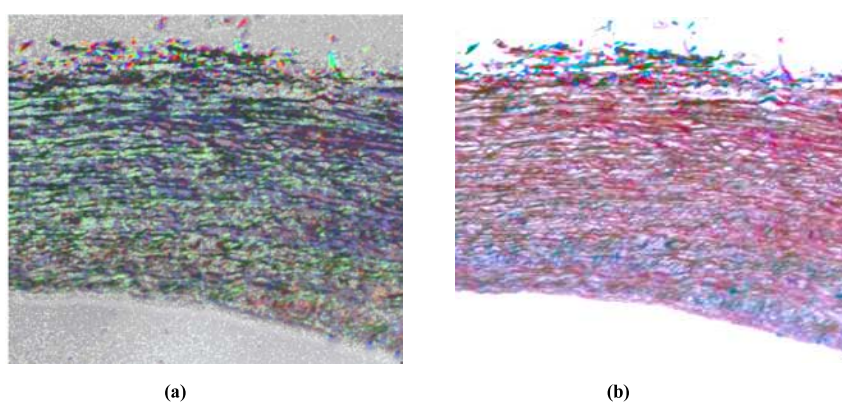


FIG. 4.16 – Image couleur du vaisseau sain. (a) espace HSV, (b) espace Lab

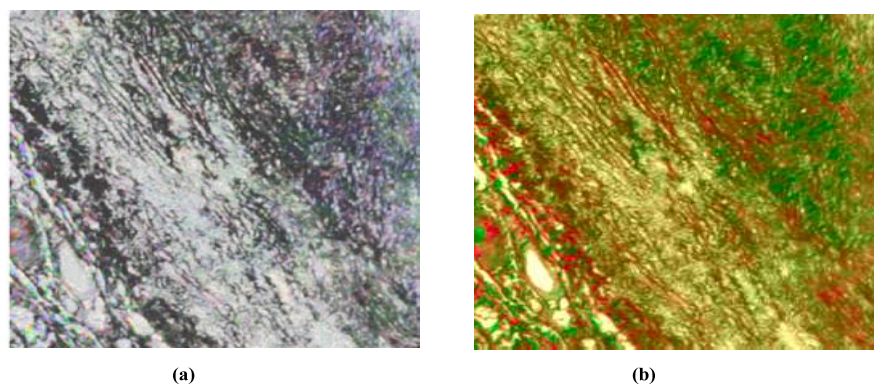


FIG. 4.17 – Image couleur du vaisseau pathologique. (a) espace HSV, (b) espace Lab

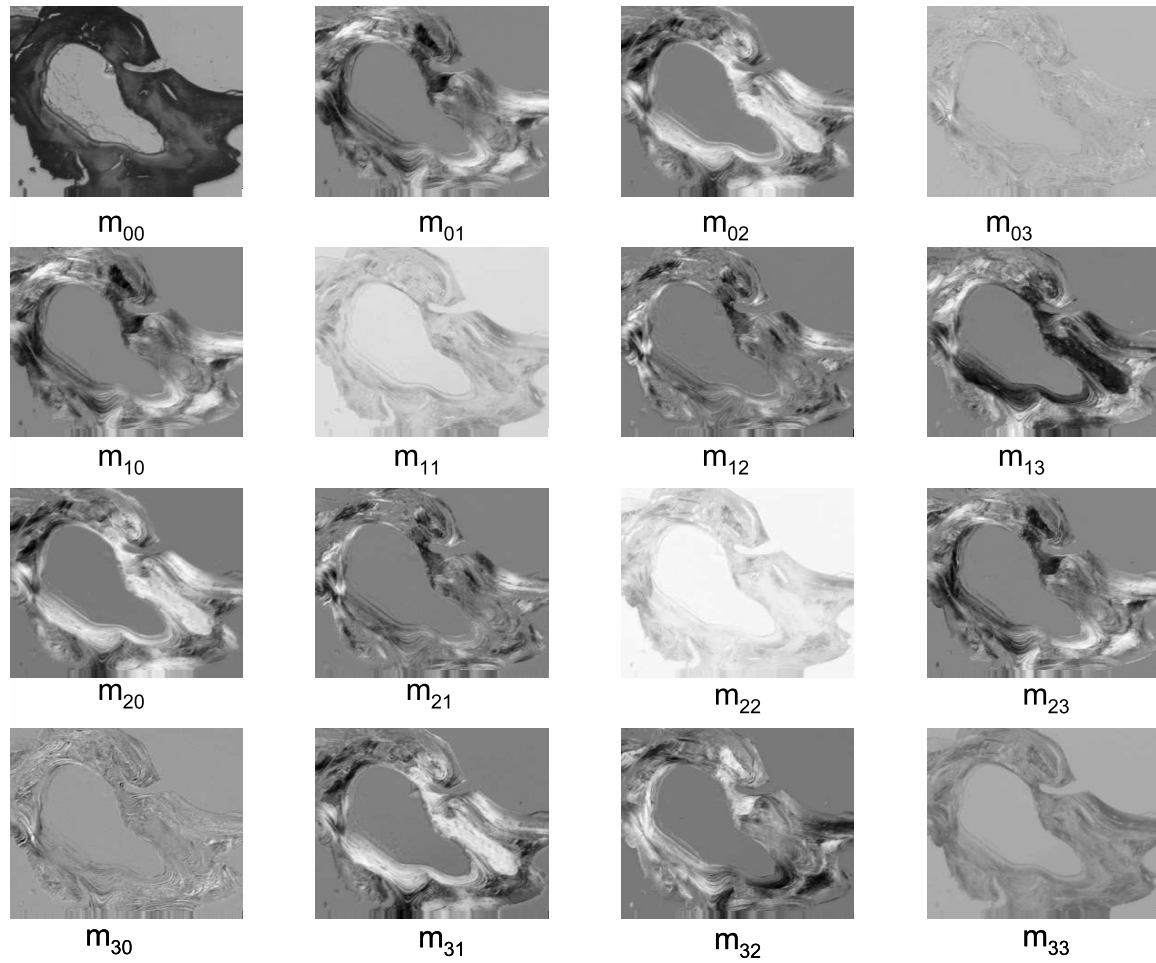


FIG. 4.18 – Image de Mueller d'une section histologique d'un os

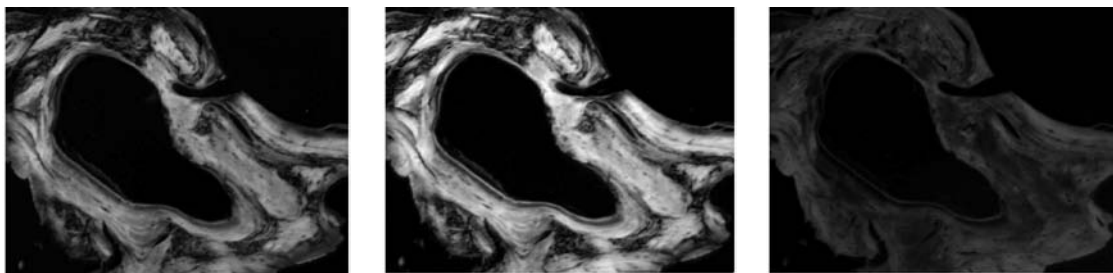


FIG. 4.19 – Décomposition polaire de l'image de Mueller de l'os : (a) image diatténuation, (b) image Retardance, (c) image dépolarisation

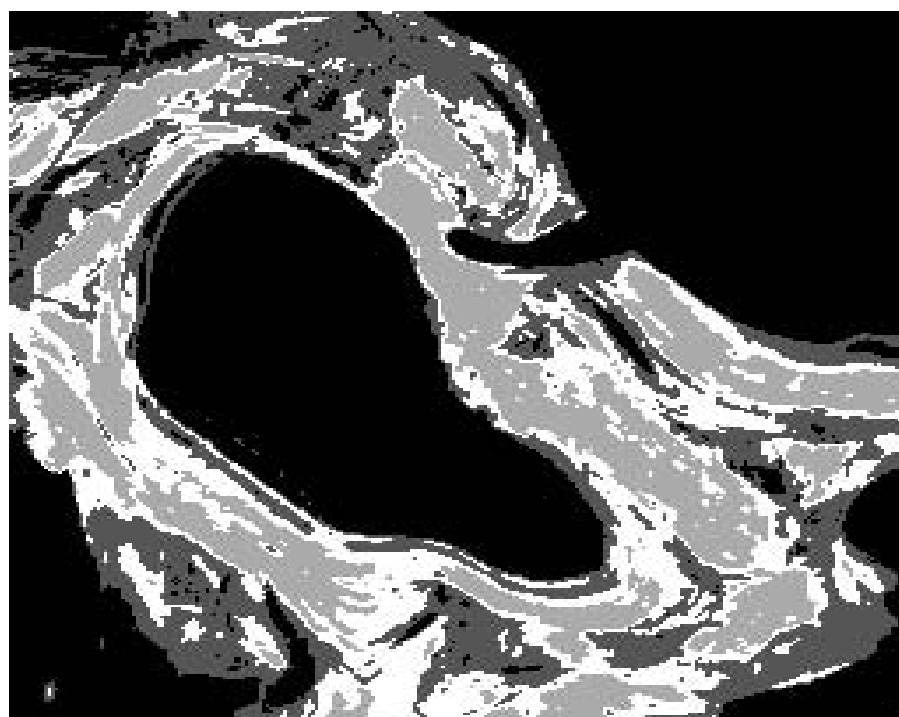


FIG. 4.20 – Carte de segmentation pour 4 classes de l’algorithme des HSV-means appliqué à l’image HSV de la section histologique de l’os

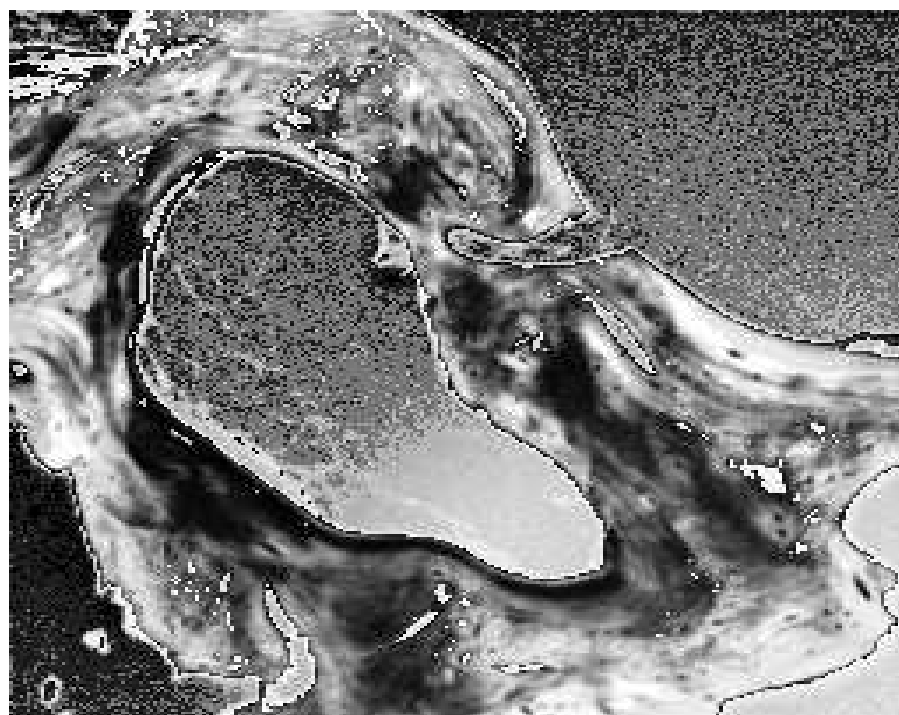


FIG. 4.21 – Nouveau canal  $V$  après égalisation d’histogrammes

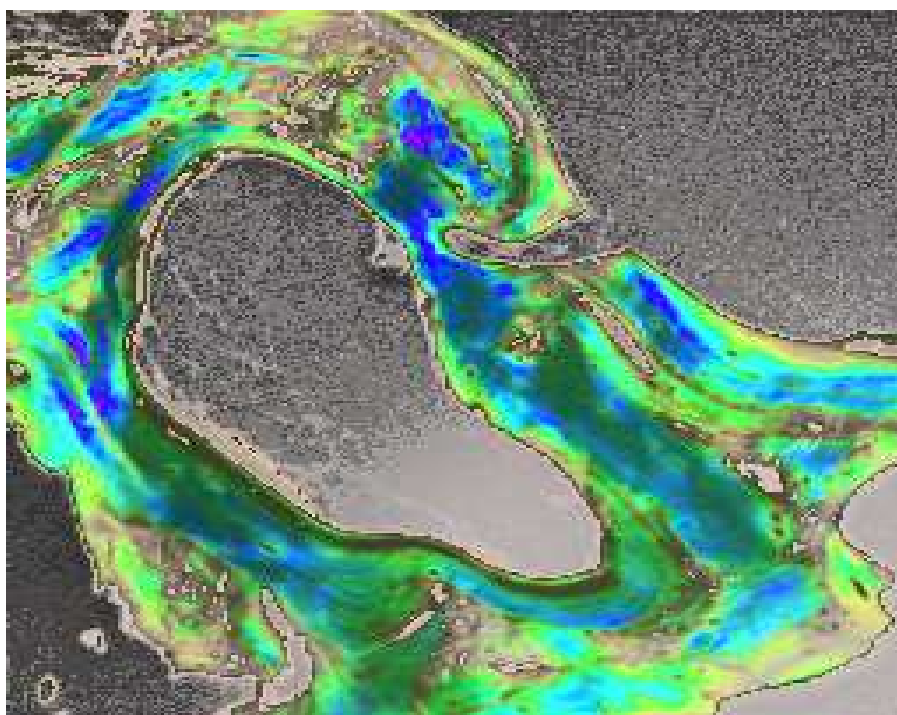


FIG. 4.22 – Représentation couleur de l'image de Mueller de l'os dans l'espace HSV, le résultat est affiché en RGB

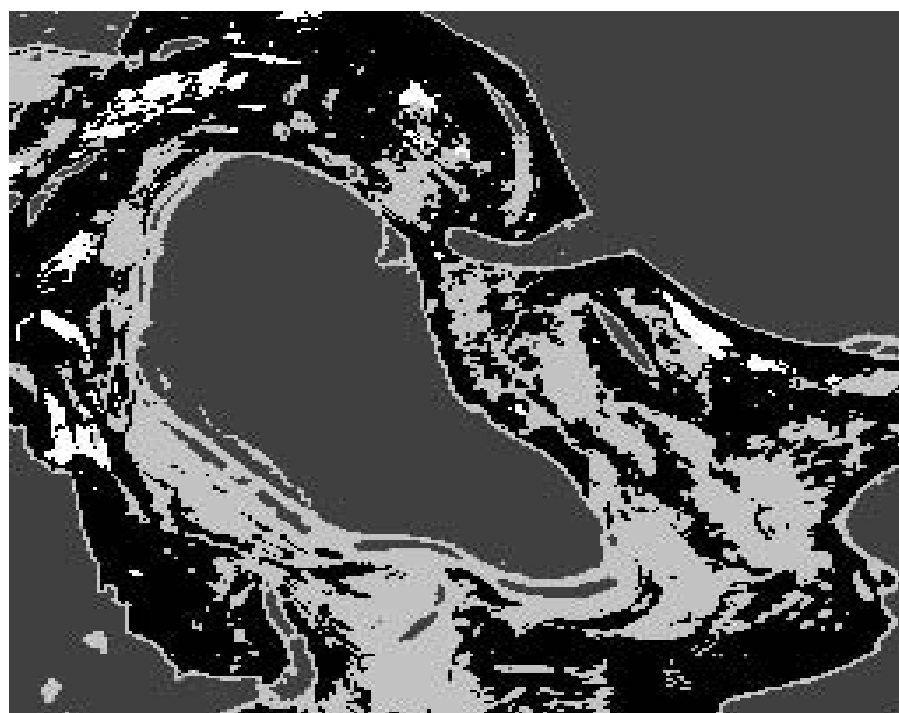


FIG. 4.23 – Carte de segmentation par quaternions pour 4 classes de l'image de Mueller de la coupe histologique de l'os



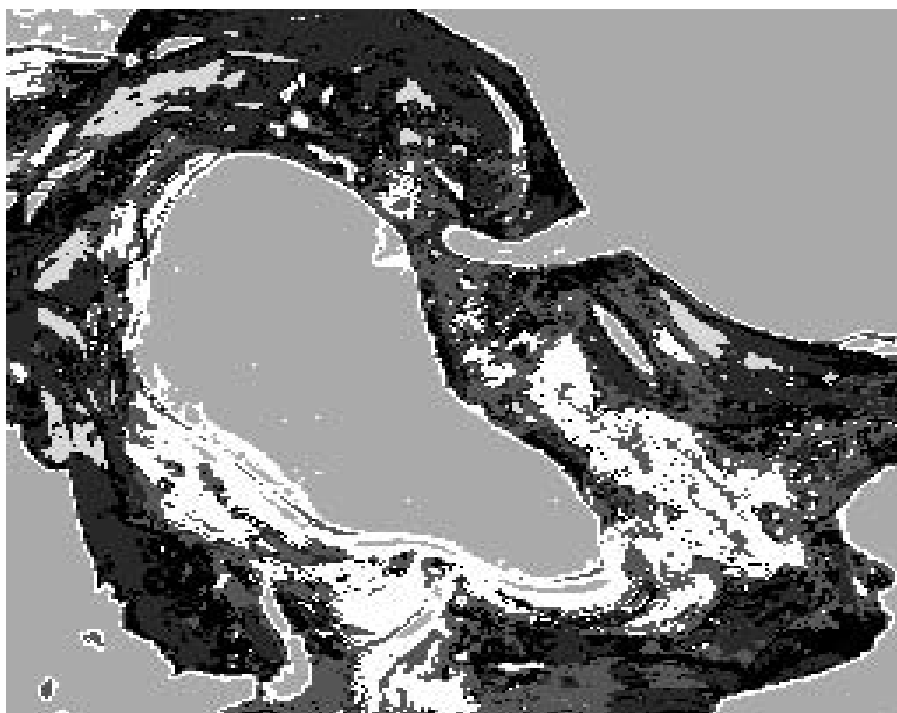


FIG. 4.24 – Carte de segmentation par quaternions pour 6 classes de l'image de Mueller de la coupe histologique de l'os

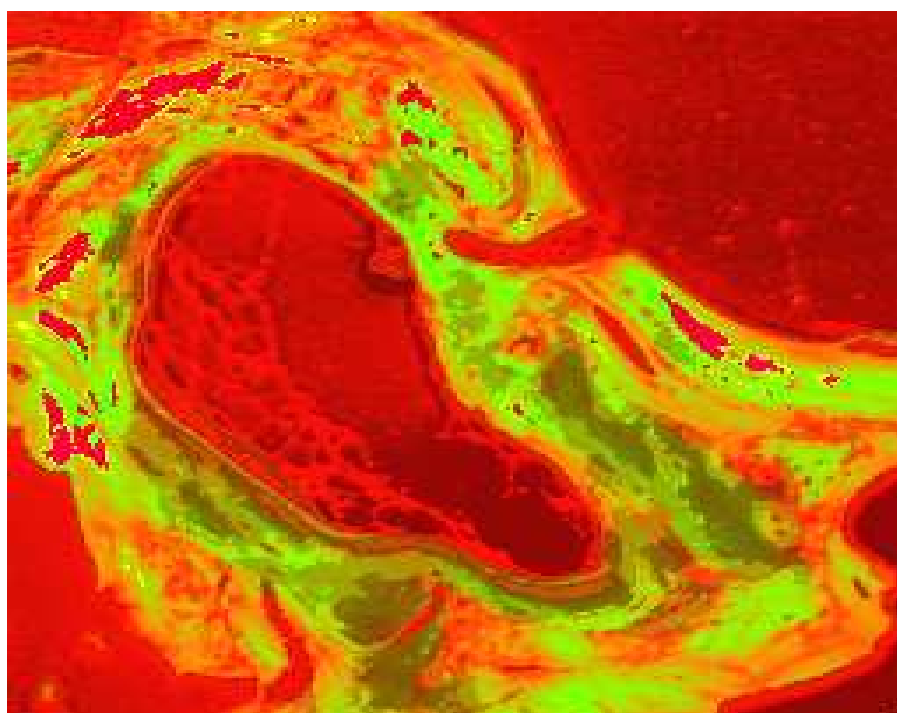


FIG. 4.25 – Prévisualisation couleur de l'image de Mueller de l'os en utilisant les quaternions, affichage RGB



# Conclusion générale

Le traitement d'images multidimensionnelles de polarisation est un sujet délicat qui doit être abordé en gardant présent à l'esprit la nature physique du signal mesuré. Il s'agit d'extraire de ces images des informations physiques qui caractérisent les constituants de l'objet bien au-delà de la valeur relative de la luminance des pixels qui sert à obtenir une information purement visuelle comme c'est le cas des images d'intensité en niveaux de gris. Dans cette thèse, nous avons démontré qu'une mise en œuvre efficace de cette modalité d'imagerie passe nécessairement par une analyse fine de toutes les étapes qui mènent à l'obtention des images codées en polarisation. Les contraintes fortes d'admissibilité physique des grandeurs mesurées imposent une attention particulière à la constitution du système imageur ainsi que sa procédure d'étalonnage. En liaison avec le système ainsi défini, nous avons proposé des méthodes de filtrage efficaces du bruit des images polarimétriques afin d'assurer des images de grande qualité. Par ailleurs, un nouveau formalisme de représentation de la polarisation des ondes lumineuses ainsi que des opérateurs caractérisant les systèmes a été introduit afin de faciliter la prise en compte de cette caractéristique par les algorithmes de traitement d'image. Finalement, une méthode intuitive de représentation des informations polarimétriques basée sur une composition colorée est proposée pour faciliter l'interprétation et l'utilisation opérationnelle de cette technique d'imagerie. Les objectifs fixés pour ce travail sont donc largement atteints.

Nombre des méthodes et théories avancées dans ce travail, constituent la base d'une boîte d'outils pour le traitement et l'analyse des images de polarisation. Cela présage des avancées ultérieures dans le développement d'algorithmes de traitement basés sur une approche statistique dont l'efficacité et la pertinence ont été prouvées dans le cadre des images multi spectrales ou encore multi modalités. Il s'agit en l'occurrence, des méthodes Bayésiennes qui commencent à être développées au LSIIT. En effet, l'introduction d'une nouvelle algèbre de polarisation permet de définir une distance ou encore une mesure de similitude, éléments nécessaires pour incorporer l'*a priori* physique dans ces méthodes de traitement avancées.

Plusieurs champs applicatifs profiteront de ces développements à commencer par l'imagerie des tissus biologiques et l'imagerie biomédicale. Ces investigations sont actuellement menées en étroite collaboration entre le LSIIT et d'autres équipes de recherche. D'autres applications sont également envisagées dans le domaine de la métrologie pour l'aspect «optimisation des systèmes polarimétriques» dans le but d'une reconstruction optimale d'objets et à plus long terme, des applications en télédétection pourront être mises en œuvre.

Ce travail ouvre la voie à d'autres développements qui restent en suspens notamment

en ce qui concerne la définition d'une algèbre de polarisation plus générale qui engloberait les systèmes dépolarisants qui sont traités à part, et l'incorporation des nouvelles distances dans des méthodes plus avancées de traitement d'image. Ces perspectives en cours de développement, ne pouvaient être finalisées dans le temps imparti à la réalisation d'une thèse.

# Annexe A

## Quelques rappels mathématiques

### A.1 Symboles

#### A.1.1 fonction de Heaviside

La fonction de Heaviside ou fonction échelon est une fonction discontinue prenant la valeur 0 pour les réels strictement négatifs et 1 partout ailleurs :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

#### A.1.2 la fonction sign

C'est une fonction qui désigne le signe d'une variable. Elle renvoie l'une des trois valeurs : -1 lorsque le réel est strictement négatif, 1 s'il est strictement positif et 0 s'il est nul :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

#### A.1.3 Symbole de Kronecker

C'est une fonction de deux variables qui est égale à 1 si celles-ci sont égales, et 0 sinon :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

#### A.1.4 Symbole de Levi-Cività

C'est un tenseur antisymétrique d'ordre trois qui peut être exprimé à partir de l'indice de Kronecker :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) = (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3) \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Opérations sur les quaternions

Le corps des quaternions  $Q$  se construit sur  $\mathbb{C}^4$  ou  $\mathbb{R}^4$  qu'on munit de deux lois de composition : addition et multiplication

Un quaternion est alors défini par un quadruplet  $(a, b, c, d)$ .  $a$  est appelé la partie scalaire et  $(b, c, d)$  est la partie vectorielle ou imaginaire. La base canonique de  $Q$  est  $1, i, j, k$  avec  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ .

### A.2.1 Somme

La somme de 2 quaternions  $Q_1$  et  $Q_2$ , notée  $Q_1 + Q_2$  est définie comme suit :  
Si  $Q_1 = a + b.i + c.j + d.k$  et  $Q_2 = a' + b'.i + c'.j + d'.k$  alors :

$$Q_1 + Q_2 = (a + a') + (b + b').i + (c + c').j + (d + d').k$$

La somme est commutative et associative.

### A.2.2 Produit

Le produit de deux quaternions est défini selon la table de multiplication suivante :

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Il vient que : Si  $Q_1 = a + b.i + c.j + d.k$  et  $Q_2 = a' + b'.i + c'.j + d'.k$  alors :

$$Q_1.Q_2 = aa' - (bb' + cc' + dd') + (ab' + ba' + cd' - dc').i + (ac' + ca' + db' - db').j + (ad' + da' + bc' - cb').k$$

### A.2.3 Opposé

Les quaternions  $Q_1$  et  $Q_2$  sont dit opposés si leur somme est nulle. Dans ce cas on écrit :

$$Q_2 = -Q_1$$

### A.2.4 Conjugaison

On définit le conjugué (noté  $*$ ) du quaternion  $Q = a + b.i + c.j + d.k$  : de composantes  $a, b, c, d$  par :

$$Q^* = \bar{a} - \bar{b}.i - \bar{c}.j - \bar{d}.k$$

Le produit de  $Q$  par son conjugué  $Q^*$  donne :

$$QQ^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

qui est le carré de la norme  $\|Q\|$  de  $Q$

Un quaternion dont la norme est égale à 1 est dit «quaternion unitaire»

### A.2.5 Inverse

Si le quaternion  $Q$  n'est pas nul, il possède un inverse (unique) qui vaut :

$$Q^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} Q^*$$

### A.2.6 Division

Le produit étant non commutatif, on peut définir deux façons de diviser le quaternion  $P$  par le quaternion  $Q$  (non nul) :

La première est  $P.Q^{-1}$ ,

La deuxième est  $Q^{-1}P$ .

### A.2.7 Notation matricielle

Il est possible de faire correspondre à un quaternion  $q = (a, b, c, d)$  une matrice complexe :

$$\begin{pmatrix} a - i.d & -b + i.c \\ b + i.c & a + i.d \end{pmatrix}$$

ou encore la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & d & -b & -c \\ -d & a & c & -b \\ b & -c & a & -d \\ c & b & d & a \end{pmatrix}$$

Avec ces équivalences, la somme et le produit de deux quaternions correspondent respectivement à la somme et au produit des matrices qui leur correspondent.



**Remarque :**

La matrice complexe  $\begin{pmatrix} a - i.d & -b + i.c \\ b + i.c & a + i.d \end{pmatrix}$  peut encore s'écrire sous la forme :

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

où les 4 matrices  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  et  $K = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$  sont les matrices complexes qui correspondent aux quatre quaternions unités  $1, i, j$  et  $k$ .

### A.3 Espace de Minkowski

Dans un espace de Minkowski, un point est repéré par quatre coordonnées  $(x, y, z, ct)$ , les trois coordonnées d'espace et la coordonnée de temps.

Dans cet espace, la dimension relative au temps est imaginaire pure, alors que les trois autres coordonnées (spatiales) sont réelles.

Le tenseur métrique de l'espace de Minkowski est donc (si l'on prend comme convention que le temps est la première coordonnée) :

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

La pseudonorme de deux points de cet espace est définie par :

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2$$

On constate qu'elle est nulle si un rayon lumineux peut passer par ces deux points. D'un point de vue physique, un observateur ne voit que des objets qui sont à une pseudonorme nulle de lui.

# Annexe B

## Système de représentations d'une matrice de Mueller par un quaternion

### B.1 Préambule

Dans la dernière section du chapitre 1, on a évoqué le problème de la représentation d'un vecteur de Stokes ou d'une matrice de Mueller, en utilisant l'algèbre géométrique. Ceci demande la résolution d'un système linéaire et résumer tous les cas qui peuvent se présenter, particulièrement le cas où une solution existe. Deux cas peuvent se présenter : le premier est la solution que nous rapporte l'algèbre géométrique pour les déphaseurs, le deuxième est le cas d'une solution générale, représentée par un quaternion complexe.

#### B.1.1 Solution multivecteur

Si une matrice de Mueller  $M$  était représentée par un multivecteur  $R$  dans  $\mathbb{R}^3$  ayant la forme suivante

$$R = a_0 + a_1e_{12} + a_2e_{13} + a_3e_{23} \quad (\text{B.1})$$

et un vecteur de Stokes  $S = [S_0, S_1, S_2, S_3]$  par le multivecteur de  $\mathbb{R}^3$

$$S = S_0 + S_1e_{12} + S_2e_{13} + S_3e_{23} \quad (\text{B.2})$$

on aurait alors la forme linéaire suivante :

$$M.S = R^\dagger S R \quad (\text{B.3})$$

Le produit à gauche est un produit matriciel et celui à droite est un produit géométrique.

Le développement de l'équation (B.3), donne le système suivant à résoudre :

$$\begin{aligned}
 M_{00}S_0 + M_{01}S_1 + M_{02}S_2 + M_{03}S_3 &= (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)S_0 \\
 M_{10}S_0 + M_{11}S_1 + M_{12}S_2 + M_{13}S_3 &= (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)S_1 + 2(a_1a_2 - a_0a_3)S_2 + 2(a_1a_3 + a_0a_2)S_3 \\
 M_{20}S_0 + M_{21}S_1 + M_{22}S_2 + M_{23}S_3 &= 2(a_1a_2 + a_0a_3)S_1 + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)S_2 + 2(a_2a_3 - a_0a_1)S_3 \\
 M_{30}S_0 + M_{31}S_1 + M_{32}S_2 + M_{33}S_3 &= 2(a_1a_3 - a_0a_2)S_1 + 2(a_0a_1 + a_2a_3)S_2 + (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)S_3
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Ce système est linéaire à quatre inconnues  $(a_i)_{i=1,4}$ . L'identification entre les différents termes donne lieu à un autre système :

$$\begin{aligned}
 M_{01} = M_{02} = M_{03} = M_{10} = M_{20} = M_{30} &= 0 \\
 a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= M_{00} \\
 a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 &= M_{11} \\
 2(a_1a_2 - a_0a_3) &= M_{12} \\
 2(a_1a_3 + a_0a_2) &= M_{13} \\
 2(a_1a_2 + a_0a_3) &= M_{21} \\
 a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 &= M_{22} \\
 2(a_2a_3 - a_1a_0) &= M_{23} \\
 2(a_1a_3 - a_0a_2) &= M_{31} \\
 2(a_0a_1 + a_2a_3) &= M_{32} \\
 a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 &= M_{33}
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

C'est un système à 11 équations et quatre inconnues. Ceci crée une relation de dépendance entre les éléments de la matrice de Mueller  $M$ . Par conséquent, la solution de ce système existe si et seulement si  $M$  représente la matrice de Mueller d'un déphaseur  $M_R$  qui a 4 degrés de liberté. Dans ce cas la solution est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{M_{00} + M_{11} + M_{22} + M_{33}} \\
 a_1 &= \pm \frac{1}{2}\sqrt{M_{00} + M_{11} - M_{22} - M_{33}} \\
 a_2 &= \pm \frac{1}{2}\sqrt{M_{00} - M_{11} + M_{22} - M_{33}} \\
 a_3 &= \pm \frac{1}{2}\sqrt{M_{00} - M_{11} - M_{22} + M_{33}}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

On choisit d'exprimer la solution en fonction des éléments de la diagonale de  $M$ . Une matrice de Mueller peut être représentée par un multivecteur si et seulement si cette matrice caractérise un déphaseur.

Si on élargit l'ensemble des solutions du système de l'équation (B.3) aux quaternions, alors une matrice de Mueller est représentée par un quaternion complexe  $q = q_0 + q_1e_{12} + q_2e_{13} + q_3e_{23}$  ( $q_i \in \mathbb{C}$ ) si et seulement si le système d'équations suivant admet une solution :

$$M.S = q^\dagger S q \tag{B.7}$$

De même, après développement et identification des deux termes du système on aura :

$$\begin{aligned}
q_0\bar{q}_0 + q_1\bar{q}_1 + q_2\bar{q}_2 + q_3\bar{q}_3 &= iM_{00} \\
-q_1\bar{q}_0 + q_0\bar{q}_1 + q_3\bar{q}_2 - q_2\bar{q}_3 &= iM_{01} \\
-q_2\bar{q}_0 + q_0\bar{q}_2 - q_3\bar{q}_1 + q_1\bar{q}_3 &= iM_{02} \\
-q_3\bar{q}_0 + q_2\bar{q}_1 + q_1\bar{q}_2 + q_0\bar{q}_3 &= iM_{03} \\
q_1\bar{q}_0 - q_0\bar{q}_1 + q_3\bar{q}_2 - q_2\bar{q}_3 &= iM_{10} \\
q_0\bar{q}_0 + q_1\bar{q}_1 - q_2\bar{q}_2 - q_3\bar{q}_3 &= M_{11} \\
-q_0\bar{q}_3 + q_2\bar{q}_1 + q_1\bar{q}_2 - q_0\bar{q}_3 &= M_{12} \\
q_2\bar{q}_0 + q_3\bar{q}_1 + q_0\bar{q}_2 + q_1\bar{q}_3 &= M_{13} \\
q_2\bar{q}_0 - q_3\bar{q}_1 - q_0\bar{q}_2 + q_1\bar{q}_3 &= iM_{20} \\
q_3\bar{q}_0 + q_2\bar{q}_1 + q_1\bar{q}_2 + q_0\bar{q}_3 &= M_{21} \\
q_0\bar{q}_0 - q_1\bar{q}_1 + q_2\bar{q}_2 - q_3\bar{q}_3 &= M_{22} \\
-q_1\bar{q}_0 - q_0\bar{q}_1 + q_3\bar{q}_2 + q_2\bar{q}_3 &= M_{23} \\
q_3\bar{q}_0 + q_2\bar{q}_1 - q_1\bar{q}_2 - q_0\bar{q}_3 &= iM_{30} \\
-q_2\bar{q}_0 + q_3\bar{q}_1 - q_0\bar{q}_2 + q_1\bar{q}_3 &= M_{31} \\
q_1\bar{q}_0 + q_0\bar{q}_1 + q_3\bar{q}_2 + q_2\bar{q}_3 &= M_{32} \\
q_0\bar{q}_0 - q_1\bar{q}_1 - q_2\bar{q}_2 + q_3\bar{q}_3 &= M_{33}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

C'est un système à 16 équations et 4 inconnues. Une solution de ce système existe si et seulement si la matrice de Mueller  $M$  est caractéristique d'un diatténuateur, c'est-à-dire ayant la forme  $M_D$  présentée dans le chapitre 1. Dans ce cas la solution est donnée en fonction des éléments diagonaux de  $M$  comme suit :

$$\begin{aligned}
q_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{M^{00} + M^{11} + M^{22} + M^{33}} \\
q_1 &= \pm\frac{i}{2}\sqrt{M^{00} + M^{11} - M^{22} - M^{33}} \\
q_2 &= \pm\frac{i}{2}\sqrt{M^{00} - M^{11} + M^{22} - M^{33}} \\
q_3 &= \pm\frac{i}{2}\sqrt{M^{00} - M^{11} - M^{22} + M^{33}}
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Le vecteur de Stokes résultant sera complexe, pour cela on doit sommer sa partie réelle et imaginaire pour avoir le même résultat que la multiplication  $M_D.S$ .

Le produit géométrique du multivecteur  $R$  et du quaternion  $q$ , donne la représentation générale des matrices de Mueller non dépolarisantes.

### B.1.2 Exemple

Soit la matrice de Mueller suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1.000 & -0.5261 & -0.1205 & 0.1279 \\ -0.4131 & 0.5508 & 0.1924 & -0.2762 \\ -0.3908 & 0.5506 & -0.0417 & 0.2983 \\ -0.0498 & 0.0923 & -0.4381 & -0.2684 \end{pmatrix} \tag{B.10}$$

Sa décomposition polaire est donnée par :

$$M_D = \begin{pmatrix} 1.0000 & -0.5261 & -0.1205 & 0.1279 \\ -0.5261 & 0.9831 & 0.0346 & -0.0367 \\ -0.1205 & 0.0346 & 0.8400 & -0.0084 \\ 0.1279 & -0.0367 & -0.0084 & 0.8410 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.7272 & 0.3970 & -0.5599 \\ -0.0000 & 0.6722 & -0.2471 & 0.6979 \\ -0.0000 & 0.1387 & -0.8839 & -0.4465 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$M_\Delta = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0936 & 0.5974 & 0.0806 & 0.0281 \\ -0.2043 & 0.0806 & 0.6255 & -0.0318 \\ -0.0285 & 0.0281 & -0.0318 & 0.6237 \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

La matrice du déphaseur peut être représentée par le multivecteur

$$R = [0.5083 \quad -0.7780 \quad -0.3436 \quad 0.1354]$$

Soit le vecteur de Stokes  $S = [1 \quad -0.3 \quad 0.6 \quad 0.05]^t$  sur la sphère de Poincaré alors :

$$M_R S = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.0080 \\ -0.3150 \\ -0.5943 \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

et le produit géométrique

$$R^\dagger S R = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.0080 \\ -0.3150 \\ -0.5943 \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Ces deux vecteurs sont égaux, ce qui confirme que  $R$  est la bonne solution du système de l'équation (B.5) pour  $M = M_R$ .

De même le quaternion

$$q = [0.9571 \quad -0.2748i \quad -0.0630i \quad 0.0668i]$$

est équivalent à la matrice  $M_D$  :

$$M_D S = \begin{pmatrix} 1.0919 \\ -0.8021 \\ 0.3727 \\ 0.1759 \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

et le produit géométrique

$$q^\dagger S q = \begin{pmatrix} 1.0000 - 0.0919i \\ -0.2760 - 0.5261i \\ 0.4932 - 0.1205i \\ 0.0480 + 0.1279i \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

La somme de la partie réelle et de la partie imaginaire de  $q^\dagger S q$  est exactement égale à  $M_D.S$ , sauf pour la première composante. Pour cette composante, on somme les valeurs absolues des parties réelle et imaginaire.

Le système de l'équation (B.8) n'a pas de solution dans le cas du dépolariseur  $M_\Delta$ , ceci est vrai pour n'importe quel dépolariseur. Par conséquent une matrice de Muller dépolarisante n'admet aucune représentation quaternionique à cause de sa partie dépolarisante.

## B.2 Borne supérieure de l'erreur relative sur le vecteur de Stokes expérimental

Le passage de l'équation (2.16) à l'équation (2.17) du chapitre 2 se fait de la manière suivante :

$$A^{-1} - \hat{A}^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (A^{-1} \Delta A)^k A^{-1} \quad (\text{B.18})$$

En passant à la norme on obtient :

$$\|A^{-1} - \hat{A}^{-1}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|A^{-1} \Delta A\|^k \|A^{-1}\| \quad (\text{B.19})$$

Le terme  $\|(A^{-1} \Delta A)\|$  est le terme général d'une suite géométrique donc :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A^{-1} \Delta A\|^k = \frac{\|A^{-1} \Delta A\|}{1 - \|A^{-1} \Delta A\|} \quad (\text{B.20})$$

Si  $\|(A^{-1} \Delta A)\| < 1$  on peut écrire :

$$\frac{\|A^{-1} - \hat{A}^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|A^{-1} \Delta A\|}{1 - \|A^{-1} \Delta A\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \quad (\text{B.21})$$

Si on multiplie et on divise par  $\|A\|$  les termes  $\|A^{-1}\| \|\Delta A\|$  de l'équation (B.21) on obtient :

$$\frac{\|A^{-1} - \hat{A}^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|A\| \|A^{-1}\|}{1 - \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \quad (\text{B.22})$$

Comme le conditionnement de la matrice  $A$  est définie par  $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ , alors si  $\|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1$  on aura :

$$\frac{\|A^{-1} - \hat{A}^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \quad (\text{B.23})$$

D'où l'équation (2.17) du chapitre 2.

# Annexe C

## Estimation du bruit sous contraintes de réalisabilité physique

### C.1 Technique de filtrage avec contraintes

On a vu au chapitre 3 la méthode utilisée pour estimer et reconstruire le bruit additif qui affecte les images polarimétriques. Le filtrage de ce bruit se fait *a priori* par la soustraction du bruit estimé  $\delta S$  de l'image bruitée  $\hat{S}$ . Ceci ne pose aucun problème du point de vue statistique. En revanche les images qu'on manipule sont polarimétriques, donc leur authenticité repose sur la réalisabilité physique du vecteur de Stokes ou de la matrice de Mueller représentant chaque pixel. Pour ce faire, on impose une contrainte supplémentaire au processus de filtrage. Posons d'abord le problème dans son intégralité.

L'image de Stokes filtrée  $S_r$  est la différence de l'image bruitée et de l'image reconstruite du bruit :

$$S_r = \hat{S} - \delta S \quad (\text{C.1})$$

$S_r$  est un vecteur de Stokes, il doit donc vérifier :

$$S_r^t G S_r \geq 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\text{avec } G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour assurer la contrainte physique (C.2), on remplace l'équation (C.1) par  $S_r(\alpha) = \hat{S} - \alpha \delta S$ . Il s'agit maintenant de trouver un  $\alpha$  entre 0 et 1 pour que le vecteur  $S_r(\alpha)$  soit un vecteur de Stokes physiquement réalisable. Le problème est donc de trouver l'ensemble des  $\alpha$  tel que

$$f(\alpha) = S_r^t(\alpha) G S_r(\alpha) = (\hat{S} - \alpha \delta S)^t G (\hat{S} - \alpha \delta S) \geq 0 \quad (\text{C.3})$$

Le développement du terme à gauche de l'équation (C.3) nous donne une inéquation à une seule variable  $\alpha$  à résoudre, c'est-à-dire :



$$f(\alpha) = \hat{S}^t G \hat{S} - (\delta S^t G \hat{S} + \hat{S}^t G \delta S) \alpha + (\delta S^t G \delta S) \alpha^2 \geq 0 \quad (\text{C.4})$$

Si on pose  $a = \delta S^t G \delta S$ ,  $b = -(\delta S^t G \hat{S} + \hat{S}^t G \delta S)$  et  $c = \hat{S}^t G \hat{S}$ , l'inéquation à résoudre devient :

$$f(\alpha) = c + b\alpha + a\alpha^2 \geq 0 \quad (\text{C.5})$$

On va étudier dans cette annexe tout les cas qui se présentent pour la résolution de l'inéquation (C.5).

## C.2 Résolution

Deux cas généraux se présentent pour la résolution de l'inéquation (C.5) :

### C.2.1 $\Delta \geq 0$

$a \neq 0$

Deux solutions de l'équation  $f(\alpha) = 0$  existent :

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Soit  $\alpha_1$  la solution minimale et  $\alpha_2$  la maximale.  
Le signe de  $f(\alpha)$  est donné dans le tableau (C.1) :

$\alpha$	$-\infty$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$+\infty$	
$f(\alpha)$	$sign(a)$	$\circ$	$sign(-a)$	$\circ$	$sign(a)$

FIG. C.1 – Tableau de variations de la fonction  $f(\alpha)$

Trois cas se présentent d'après ce tableau :

$sign(a) > 0$

Si  $1 \in [-\infty, \alpha_1] \cup [\alpha_2, \infty, ]$  alors  $\alpha = 1$ .

Si  $1 \in [\alpha_1, \alpha_2]$  et  $\alpha_1 > 0$  alors  $\alpha = \alpha_1 - \varepsilon$ .

Sinon, il n'existe pas de  $\alpha$  entre 0 et 1.

$sign(a) < 0$

Si  $1 \in [\alpha_1, \alpha_2]$  alors  $\alpha = 1$ .

Si  $0 < \alpha_2 < 1$  alors  $\alpha = \alpha_2 - \varepsilon$ .

Sinon, il n'existe pas de  $\alpha$  entre 0 et 1.

$a = 0$

Dans ce cas, il existe une seule solution  $\alpha_1 = \frac{c}{b}$ .  $f(\alpha)$  est donc positive si  $\alpha \leq \alpha_1$  et strictement négative sinon. On choisit alors  $\alpha$  comme suit :

Si  $0 < \alpha_1 < 1$  alors  $\alpha = \alpha_1 - \varepsilon$

Si  $\alpha_1 > 1$  alors  $\alpha = 1$

sinon, il n'existe pas de  $\alpha$  entre 0 et 1.

### C.2.2 $\Delta < 0$

Dans ce cas la solution n'est pas réelle, donc pas intéressante vu que les élément d'un vecteur de Stokes doivent être réels.

## C.3 Filtrage

Après présentation des cas où  $f(\alpha)$  peut être positive, on procède au filtrage du vecteur de Stokes sur chaque pixel de l'image. La procédure se résume par les étapes suivantes

- Si un pixel est physiquement réalisable : ne rien faire
- Si le discriminant  $\Delta \geq 0$  choisir  $0 < \alpha \leq 1$  selon le cas qui se présente
- Si le discriminant  $\Delta < 0$  ou il existe un  $\alpha$  mais hors l'intervalle  $[0, 1]$ , alors choisir le maximum entre  $\hat{S}^t G \hat{S}$  et  $S_r^t G S_r$



# Annexe D

## Liste des publications

Cette thèse a donné lieu aux publications suivantes :

### D.1 Revues internationales avec comité de lecture

S. Ainouz, J. Zallat, A. De Martino, and C. Collet. Physical interpretation of polarization encoded image by color preview. *Optics express*, Issue. 13, Vol. 14, pp : 5916-5927, June 2006.

J. Zallat, S. Ainouz, and M.P. Stoll. Optimal configurations for imaging polarimeters : impact of image noise and systematic errors. *Journal of optics A : Pure and Applied Optics*, Vol. 8, pp : 807-814, July 2006.

S. Ainouz, J. Zallat, A. De Martino and M. P. Stoll. Stokes images analysis using Poincaré sphere to color space mapping. *WSEAS transaction on signal processing*. Issue 4, Vol.2, pp : 452-458, April 2006.

### D.2 Conférences internationales avec comité de lecture

S. Ainouz, J. Zallat, and A. De Martino. Clustering and color preview of polarization-encoded images. *EUSIPCO'06*, Florence, ITALY, September 2006.

S. Ainouz, J. Zallat and A. De Martino. Interpretation of polarization-encoded images using clustering and Lab color space. *MUSP'06*, Hangzhou, CHINA, April 2006.



# Bibliographie

- [1] S. Ainouz, J. Zallat, and A. De Martino. Clustering and color preview of polarization-encoded images. *EUSIPCO 2006, Firenze, Italy*, 2006.
- [2] S. Ainouz, J. Zallat, and A. De Martino. Interpretation of polarization-encoded images using clustering and lab color space. *Int. Conf. MUSP'06, China*, 2006.
- [3] S. Ainouz, J. Zallat, A. De Martino, and C. Collet. Physical interpretation of polarization-encoded images by color preview. *Opt. Express*, 14 :5916–5927, June 2006.
- [4] S. Ainouz, J. Zallat, A. De Martino, and M. P. Stoll. Stokes images analysis using Poincaré sphere to color space mapping. *WSEAS Transaction On Signal Processing*, 2(4) :452–458, April 2006.
- [5] A. Ambirajan and C. D. Look. Optimum angles for a polarimeter : part 1. *OPTICAL ENGINEERING*, 34(6) :1651–1655, June 1995.
- [6] A. Ambirajan and C. D. Look. Optimum angles for a polarimeter : part 2. *OPTICAL ENGINEERING*, 34(6) :1656–1659, June 1995.
- [7] R. M. A. Azzam. Poincaré sphere representation of fixed-polarizer rotating retarder optical system. *Journal of the Optical Society of America. A*, 17(11), 2000.
- [8] R. Barakat. Conditions for the physical realizability of polarization matrices characterizing passive systems. *J. Mod.*, 34(12), 1987.
- [9] F. R. et al Brehonnet. Analysis of depolarizing optical targets by Mueller matrix formalism. *Pure Appl. Opt*, pages 384–404, 1997.
- [10] A. et al Brono. Estimating noise and information of multispectral imagery. *Opt. Eng.*, 41(3), 2002.
- [11] A. et al Bruno. Assessment of noise variance and information content af multi-/hyper-spectral imagery. *ISPRS Int. Arch. Photogram. Remote Sensing*, 32 :167–174, 1999.
- [12] J. M. Bueno and M. C. W. Campbell. Confocal scanning laser ophthalmoscopy improvement by use of Mueller-matrix polarimetry. *Opt. Lett*, 27(10) :830–832, May 2002.
- [13] J. M. Bueno and M. C. W. Campbell. Polarization properties of the in vitro old human crystalline lens. *Ophthalmic and Physiological Optics.*, 23(2) :109–118, 2003.
- [14] R. C. H. Cheng. Bootstrap methods in computer simulation experiments. *Simulation Conference Proceedings*, 2 :171–177, 1995.

- [15] R. A. Chipman. *Polarimetry*. Mcgraw-hill, new york edition, 1993. in Handbook of Optics, Chapter22.
- [16] R. A. Chipman. Polarization analysis of optical systems. *Opt. Eng.*, 37(6) :90–99, 1993.
- [17] R. Givens Clark and Alexander B. Kostinski.
- [18] S. R. Cloude. Group theory and polarization algebra. *Optik*, 75 :26–36, 1986.
- [19] S. R. Cloude and E. Pottier. Concept of polarization entropy in optical scattering. *Optical Engineering*, 34(6), 1995.
- [20] S. R. Cloude and E. Pottier. A review of target decomposition theorems in radar polarimetry. *IEEE transaction on Geoscience and Remote Sensing*, 34(2), 1996.
- [21] C. Collet, J. Zallat, and Y. Takakura. Clustering of Mueller matrix images for skeletonized structure detection. *Opt. Express*, 12 :1271–1280, 2004.
- [22] B. R. Corner, R. M. Narayanan, and S. E. Reinchenbach. Noise estimation in remote sensing imagery using data masking. *Int. J. Remote Sensing*, 24(4), 2003.
- [23] A. De Martino, Y. K. Kim, E. Garcia-Caurel, L. Blandine, and B. Drévilion. Optimized Mueller polarimeters with liquid crystals. *Optics Letters*, 28(8) :616–618, April 2003.
- [24] E. Degl’Innocenti and J.C. Iniesta. Physical significance of experimental Mueller matrix. *Journal of the Optical Society of America. A*, 15(2), 1998.
- [25] S. G. Demos and R. R. Alfano. Optical polarization imaging. *Appl. Opt.*, 36(1) :150–155, January 1997.
- [26] G. M. Donald, Anderson, and R. Barakat.
- [27] P. Finet. Geometrical approach to polarization optics : Geometrical structure of polarized light. *Optik*, 87(1), 1991.
- [28] E. S. Fry and G. W Kattawar. Relationships between the elements of the Stokes matrix. *Appl. Opt.*, 20(16) :3428–3435, August 1981.
- [29] P. Y. Gerligand, M. H. Smith, and R. A. Chipman. Polarimetric images of a cone. *OPTICS EXPRESS*, 4(10) :420–430, May 1999.
- [30] J. J. Gil. Characteristic properties of Mueller matrices. *Journal of the Optical Society of America. A*, 17(2) :328–334, February 2000.
- [31] J. J. Gil and E. Bernabeu. Obtainment of the polarizing and retardation parameters of a non-depolarizing optical system from the polar decomposition of its Mueller matrix. *OPTIK*, 76 :67–71, 1987.
- [32] H. Goldstein and R. A. Chipmann. Error analysis of a Mueller matrix polarimeter. *Journal of the Optical Society of America. A*, 7(4), 1990.
- [33] R. C. Gonzalez and R. E. Woods. *Digital Image Processing*. 2002.
- [34] F. Goudail, P. Terrier, Y. Takakura, L. Bigué, F. Galland, and V. Devlamink. Target detection with a liquid-crystal-based passive stokes polarimeter. *Applied Optics*, 43(2), 2004.

- 
- [35] J. Gross, G. Trenkler, and S. O. Troschke. Quaternions : further contributions to a matrix oriented approach. *Linear Algebra And Its Applications*, 326(1-3) :205–213, March 2001.
- [36] D. Hayes. Error propagation in decomposition of Mueller matrices. *Proceedings of SPIE*, 3121 :112–123, October 1997.
- [37] R. Horn and C. R. Johnson. *Matrix analysis*. 1989.
- [38] B. J. Howell. Measurement of the polarization effects of an instrument using partially polarized light. *Appl. Opt.*, 18(6) :1809–1812, March 1979.
- [39] S. Huard. *Polarisation de la lumière*. Masson edition, 1994.
- [40] S. L. Jacques and J. R. Roman. Imaging superficial tissues with polarized light. *Lasers in Surgery and Medicine*, 26(2) :119–129, 2000.
- [41] S. L. Jiao and L. H. V. Wang. Jones-matrix imaging of biological tissues with quadruple-channel optical coherence tomography. *J. Biomed. Opt.*, 7 :350–358, 2002.
- [42] N. Kazakova, M. Margala, and N. G. Durdle. Sobel edge detection processor for a real-time volume rendering system. *ISCAS'04*, 2 :913–916, May 2004.
- [43] A. B. Kostinski, Given C. R., and J.M. Kwiatkowski. Constraints on mueller matrices of polarization optics. *App. Opt.*, 32 :1646–1651, 1993.
- [44] Alexander B. Kostinski, Brian D. James, and Wolfgang-M. Boerner.
- [45] B. Laude-Boulesteix. Développements instrumentaux en imagerie tomographique et polarimétrique. *Thèse de Doctorat, Ecole polytechnique, Paris*, 2004.
- [46] B. Laude-Boulesteix, A. De Martino, B. Drévilion, and L. Schwartz. Mueller polarimetric imaging system with liquid crystals. *Appl. Opt.*, 43(14) :2824–2832, May 2004.
- [47] J. S. Lee. Speckle suppression and analysis for synthetic aperture radar images. *Opt. Eng.*, 25 :636–643, May 1986.
- [48] J. S. Lee and K. Hoppel. Noise modeling and estimation of remotely-sensed images. *IGARSS'89*, 1989.
- [49] Y.W. Lim and S.U. Lee. On the color image segmentation algorithm based on the thresholding and the fuzzy C-means techniques. *Pattern Recognition*, 23(9) :935–952, 1990.
- [50] S. Y. Lu and A. Chipman. Mueller matrices and the degree of polarization. *Optics Communications*, 146(11,14) :226–236, January 1998.
- [51] S. Y. Lu and A. Russel Chipman. Homogeneous and inhomogeneous Jones matrices. *Journal of the Optical Society of America. A*, 11(2), 1994.
- [52] S. Y. Lu and A. Russel Chipman. Interpretation of Muller matrices based on polar decomposition. *Journal of the Optical Society of America. A*, 13(5), 1996.
- [53] D. Miyasaki, M. Saito, Y. Sato, and K. Ikeuchi. Determining surface orientations of transparent objects based on polarization degrees in visible and infrared wavelengths. *J. Opt. Soc Am. A*, 19(4) :687–694, April 2002.



- [54] N. Otsu. A threshold selection method from gray-level histograms. *IEEE Transaction On Systems, Man And Cybernetics*, 1979.
- [55] P. Pellat Finet. Geometrical approach to polarization optics : Quaternionic representation of polarized light. *Optik*, 87(2), 1991.
- [56] J. L. Pezzaniti and R. A. Chipman. Mueller matrix imaging polarimetry. *Opt. Eng.*, 34 :1558–1568, 1995.
- [57] R. Roux. Imagerie de Stokes stéréo : Application à la reconstruction 3D. *mémoire de DEA Photonique, Image et Cybernétique, Université Louis Pasteur*, 2005.
- [58] M. P. Rowe, E. N. Pugh, J. S. Tyo, and N. Engheta. Polarization-difference imaging : a biologically inspired technique for observation through scattering media. *Opt. Lett.*, 20(6) :608–610, March 1995.
- [59] D. S. et al Sabatke. Optimization of retardance for a complete stokes polarimeter. *Opt. Lett.*, 25(11) :802–804, June 2000.
- [60] M. Sanjay and R. Simon. Characterization of Mueller matrices in polarization optics. *Optics Communications*, 88(4,5,6) :464–470, 1992.
- [61] S. N. Savenkov. Optimization and structuring of the instrument matrix for polarimetric measurements. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 41(5) :965–972, May 2002.
- [62] D. et al Shin. Block-based noise estimation using adaptive gaussian filtering. *IEEE, CNF*, pages 263–264, January 2005.
- [63] M. H. Smith. Optimizing a dual-rotating-retarder Mueller matrix polarimeter. *Appl. Opt.*, 41 :2488–2493, 2001.
- [64] R. Sridhar and R. Simon. Normal form for Mueller matrices in polarization optics. *Journal Of Modern Optics*, 41(10) :1903–1915, April 1994.
- [65] L. Stutzman Warren. *Polarization in electromagnetic systems*. 1993.
- [66] S. Suter. *Geometric Algebra Primer*. 2003.
- [67] H. Takenaka. A unified formalisme for polarization optics by using group theory. *Nouv. Rev. Optique*, 4(1), 1973.
- [68] T. Tudor. Polarization waves as observable phenomena. *Journal of the Optical Society of America. A*, 14(8) :2013–2017, August 1997.
- [69] J. S. Tyo. Noise equalization in Stokes parameter images obtained by use of variable-retardance polarimeters. *Opt. Lett.*, 25(16) :1198–1200, August 2000.
- [70] J. S. Tyo. Design of optimal polarimeters : maximization of signal-to-noise ratio and minimization of systematic error. *Appl. Opt.*, 41(4) :619–630, February 2002.
- [71] J. S. Tyo, E. N. P. Jr, and N. Engheta. Colorimetric representations for use with polarization-difference imaging of objects in scattering media. *Journal of the Optical Society of America. A*, 15(2) :367–374, February 1998.
- [72] L. B. Wolff, T. A. Mancini, P. Pouliquen, and A. G. Andreou. Liquid crystal polarization camera. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 13(2) :195–203, April 1997.
- [73] Z. F. Xing. On the deterministic and non-deterministic Mueller matrix. *J. Mod. Opt.*, 39(3) :461–484, March 1992.

- 
- [74] K. Yamashita and T. Shimamura. Nonstationary noise estimation using low-frequency region for spectral subtraction. *Signal Processing Letters, IEEE*, 12 :465–468, 2005.
- [75] A. N. Zahid, O. Abouelala, and M. Limouri. Unsupervised fuzzy clustering. *Pattern Recognition Letters*, 20(2) :123–129, 1999.
- [76] J. Zallat. Polarimétrie laser à 10.6um et modélisation de la réflexion diffuse des sols et milieux granulaires. *Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur*, 1997.
- [77] J. Zallat, S. Ainouz, and M. P. Stoll. Optimal configuration for imaging polarimeters : impact of image noise and systematic errors. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 8 :807–814, July 2006.
- [78] J. Zallat, P. Graebing, and Y. Takakura. Using polarimetric imaging for material classification. *ICIP'03*, 3 :827–830, 2003.
- [79] J. Zallat and Y. Takakura. Clustering of polarization-encoded images. *Appl. Opt.*, 43(2) :1–10, 2004.
- [80] C. Zang and P. Wang. A new method of color image segmentation based on intensity and hue clustering. *ICPR'00, Barcelona, Spain*, 2000.

**Résumé.** Ce travail concerne les développements nécessaires à la mise en œuvre efficace de systèmes imageurs polarimétriques et comporte plusieurs volets allant de la théorie amont à l'utilisation d'algorithmes de traitement d'images spécifiques. Les principaux objectifs et les développements réalisés se rapportent à:

- la représentation algébrique des formalismes de polarisation en utilisant les quaternions : toute matrice de Mueller non dépolarisante peut être mise sous forme d'un quaternion complexe et l'action d'un système optique sur une onde monochromatique s'écrit comme le produit géométrique du quaternion correspondant à la matrice de Mueller par le multivecteur représentant le vecteur de Stokes. Cette utilisation de l'algèbre géométrique permet de définir formellement la notion de distance, de similitude et d'appartenance à une classe.
- l'optimisation des polarimètres imageurs et le calcul de l'erreur sur les mesures : la démarche, basée sur l'utilisation du produit de Kronecker, prend en compte de façon conjointe les erreurs systématiques et le bruit d'image et leur minimisation est obtenue dès l'étape de conception. Plusieurs fonctions de mérites sont introduites pour permettre la définition des caractéristiques du polarimètre optimal.
- l'estimation et le filtrage du bruit des images polarimétriques : deux méthodes sont envisagées i) une nouvelle variante de la méthode du « scatter plot » combinée avec une vectorisation de l'image par un parcours de type Piano-Hilbert, ii) la méthode du masquage de données qui repose sur l'utilisation de la différence entre deux approximations de l'opérateur Laplacien. Les performances et les biais des deux estimateurs choisis sont étudiés statistiquement par la méthode du « Bootstrap ».
- la classification et la prévisualisation couleur des images codées en polarisation : on propose une représentation colorée des images codées en polarisation, comme une aide à leur interprétation en fonction de leur contenu physique, qui utilise la décomposition polaire pour le cas de l'imagerie de Mueller et repose sur deux mappages entre la sphère de Poincaré et un espace de couleur paramétrique dans le cas de l'imagerie de Stokes. Le processus de segmentation est basé sur la famille des algorithmes des K-moyennes. Cette démarche est illustrée sur des images de Stokes et de Mueller de tissus biologiques.

**Mots-clés :** imagerie de polarisation, algèbre de polarisation, quaternions, optimisation de systèmes, filtrage du bruit, segmentation, colorisation

---

**Abstract :** This work, which aims at providing tools for effective using of polarimetric imaging systems, includes the following objectives and developments:

- algebraic representation of polarization based on using quaternions: any non-depolarizing Mueller matrix is matched to a complex quaternion so that action of an optical system on a monochromatic wave writes as the geometric product of that quaternion by the multivector representing the Stokes vector. This way allows formal definition of concepts like distance, similarity and class membership.
- optimisation of imaging polarimeters and quantification of measurement errors: systematic errors as well as image noise are considered jointly and minimisation is searched for from design of the system onwards. The method makes use of the Kronecker product. Figures of merit are introduced to define the characteristics of optimal polarimetric system.
- estimate and filtering of noise on polarimetric images: two methods are proposed i) a new variant of the “scatter-plot” method combined with image vectorization through Piano-Hilbert route type, ii) data masking that relies on using the difference between two approximations of the Laplace operator. Performances and biases are estimated statistically based on the “Bootstrap” method.
- classification and preview color encoding of polarimetric images: this color preview aims at facilitating interpretation of images according to their physical content. One method makes use of the polar decomposition (Mueller imagery), the other one uses mapping of the Poincaré sphere on parametric color spaces (Stokes imagery). Segmentation is based on K-means algorithms. Preview color encoding is illustrated with Mueller and Stokes images of biological tissues.

**Keywords:** polarimetric imaging, polarisation algebra, quaternions, system optimisation, noise filtering, segmentation, color preview