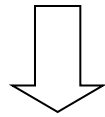


# Asservissement linéaire continu

**Cours AUTO1, CFI INSA de Rouen, Samia Ainouz-Zemouche,  
samia.ainouz@insa-rouen.fr**

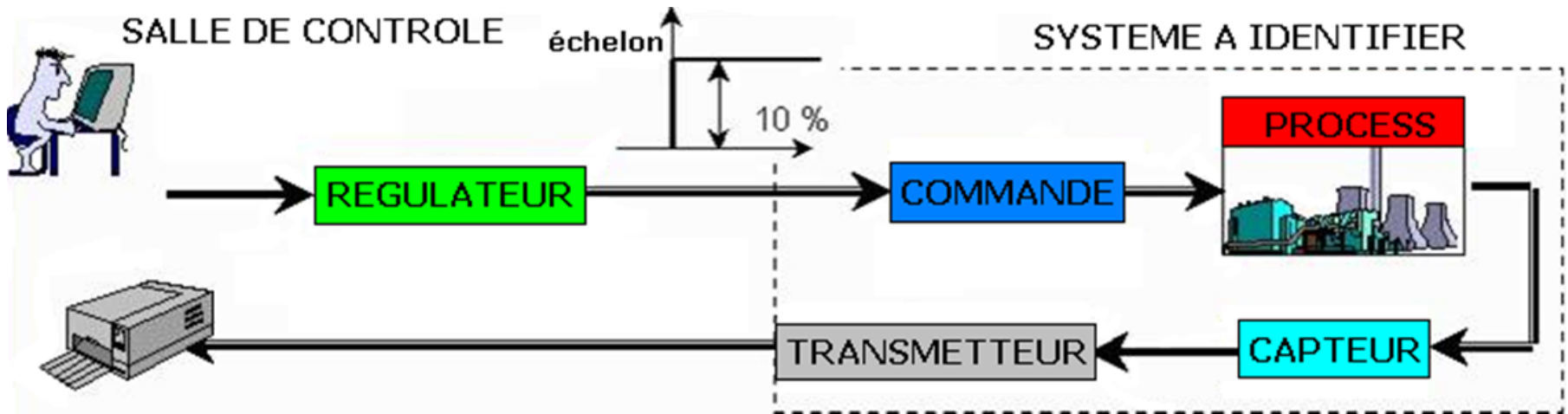
# Introduction

- **A la douche : Je veux une eau confortable à 35-37°C**
- **Douche 1** : 2 robinets, on règle soit même la température de l'eau (système à réaction (feedback))
- **Douche 2** : avec un thermostat l'eau se chauffe automatiquement jusqu'à température désirée



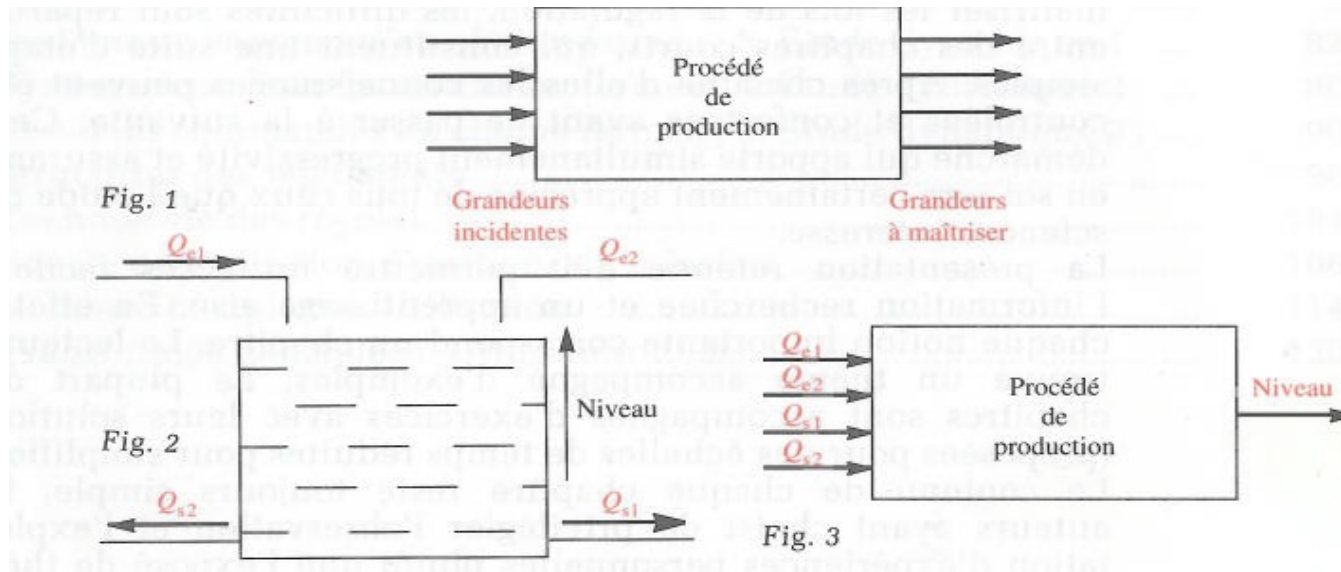
Régulation automatique

# Introduction



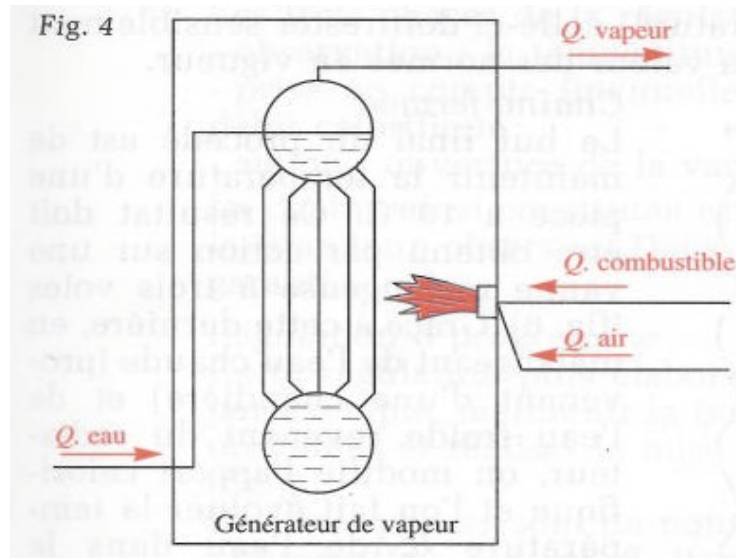
# Introduction

- **Stockage de produit liquide**



# Introduction

- **Générateur de vapeur**



- Grandeur incidentes : Débit des fluides ( $Q$ ), pression au foyer, niveau d'eau
- Grandeur de sortie : vapeur d'eau
- A régler : vitesse des moteurs entraînant les pompes qui font circuler les fluides dans les installations chimiques

- La plupart des réactions chimiques industrielles nécessitent d'être réalisées à des températures élevées
- Nécessité d'un fluide caloporteur pour chauffer les réacteurs chimiques.
- Une chaudière est donc **un procédé** dont le but final est la production de vapeur d'eau avec des **caractéristiques constantes**
- On doit maîtriser : température et pression.

# Introduction

## Il existe deux branches principales en automatique

- **Asservissement et régulation** : maintenir constante une grandeur physique ou lui imposer une certaine évolution
- **Automatique séquentielle** : automatisation d'une séquence d'instruction connue à l'avance (but du second cours)

# Introduction

## Asservissement et régulation :

- Amener la ou les sorties du processus à une ou des valeurs conformes à **une consigne** définie pas l'utilisateur
  - Consigne est fixe : **régulation**
  - Consigne est variable : **asservissement**
- Exemples de régulation : régulation de la température d'un bouilleur régulation de niveau dans une cuve...
- Exemples d'asservissement : Asservissement de la trajectoire d'un avion au plan de vol, asservissement d'une position, d'une vitesse,...

# But du cours

- ✓ Maîtriser **les systèmes** à contre-réaction (retour d'état)
- ✓ Modéliser un **système linéaire** (transmittance)
- ✓ Étudier le comportement **fréquentiel et/ou temporel** d'un système linéaire.
- ✓ Définir ces **caractéristiques essentielles** : stabilité, paramètres du système, gain, précision, erreur, régime permanent...
- ✓ Apprendre à **réguler** un système
- ✓ Apprendre à **synthétiser** un système selon un cahier des charges souhaité par l'industriel (**régulateurs et correcteurs**)
- ✓ Application au cas des **procédés chimiques** (but des TP)



# Plan général du cours

- **Asservissement linéaire continu**
- **Méthodes d'études des systèmes asservis linéaires**
- **Principales qualités des systèmes asservis**
- **Étude dans le domaine temporel : Réponse indicielle**
- **Étude dans le domaine fréquentiel : Plan de Bode**
- **Étude, choix et synthèse des régulateurs et correcteurs**

# II-Asservissement linéaire continu

## Plan

- **Définitions : système, linéarité, invariance, causalité**
- **Réponse des systèmes à temps continus**
- **Transformée de Laplace**
- **Théorème de Plancherel**
- **Fonction de transfert ou transmittance**
- **Modélisation des transmittances**

# Asservissement linéaire continu

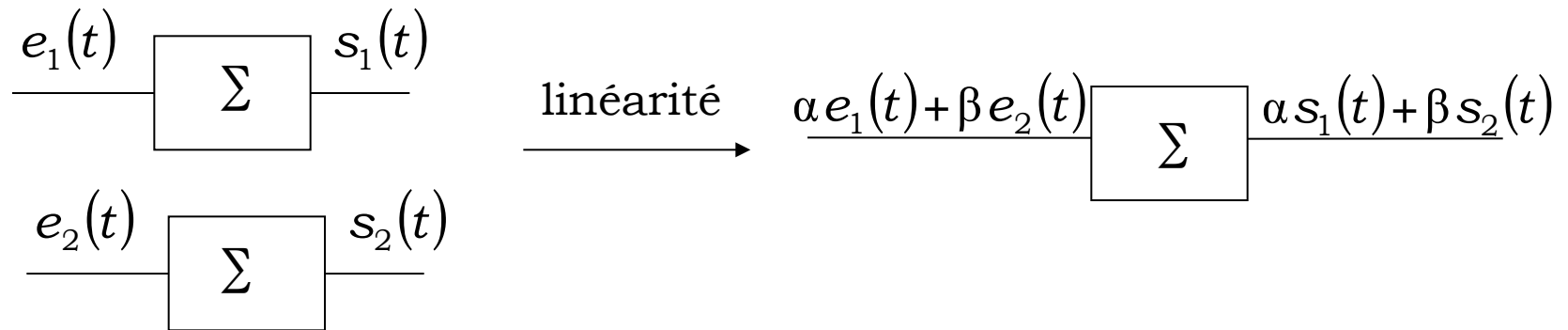
## Systeme :

- Un système est un **procédé** de nature quelconque qui évolue sous l'action de son **entrée**  $e$  (input ) et dont l' **évolution** est caractérisée par sa **sortie**  $s$  (output).
- Si ces deux grandeurs sont des fonctions d' une **variable continue**  $t$ , on parle de système a **temps continu**
- On s' intéresse dans ce cours aux systèmes mono-entrée mono-sortie **linéaires invariants**

# Asservissement linéaire continu

## Linéarité :

supposant que le processus  $\Sigma$  soit excité séparément par les entrées  $e_1(t), e_2(t)$  donnant lieu respectivement aux sorties  $s_1(t), s_2(t)$



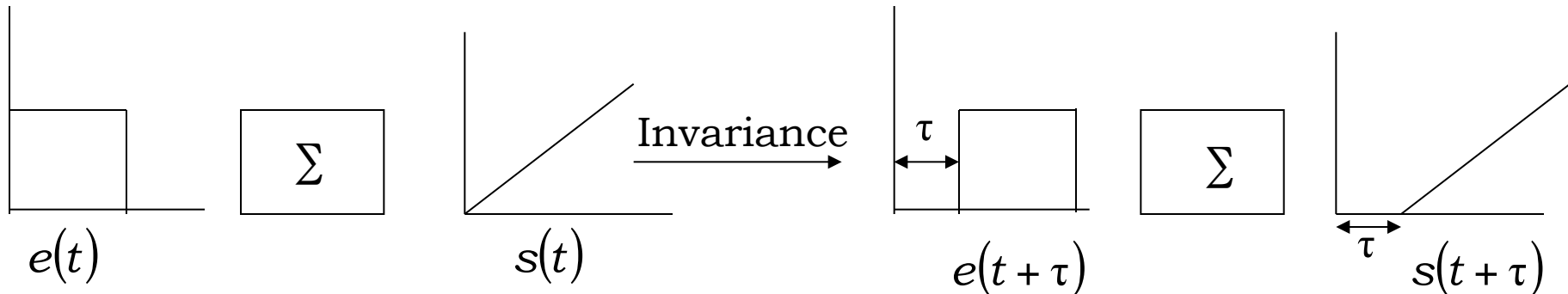
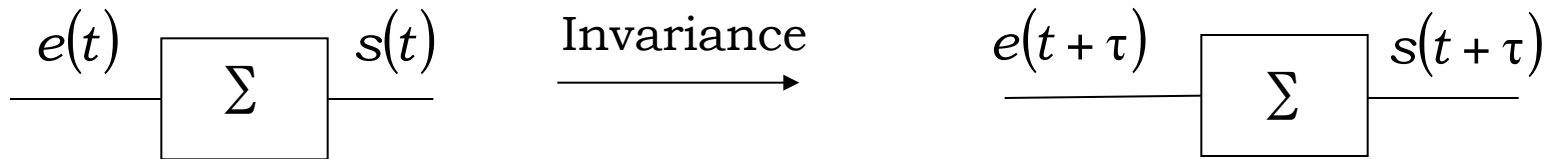
Un système est linéaire si et seulement si sa sortie vaut  $\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$  quand il est excité par l'entrée  $\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$  ( $\alpha, \beta$  constantes)

**Un système linéaire répond donc au principe de la superposition**

# Asservissement linéaire continu

## Invariance :

Un système est dit invariant si une même commande appliquée à deux instants différents produit la même sortie relatives aux instants considérés



# Asservissement linéaire continu

- **Principe de causalité** : Un système d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$  est dit causal si

$$\forall t < 0, e(t) = 0 \Rightarrow s(t) = 0$$

La réponse du système ne précède jamais son excitation.

On supposera désormais que tous les systèmes qui vont être étudiés dans ce cours sont **causaux**.

# Asservissement linéaire continu

## Linéarité et invariance :

un système est dit à la fois linéaire et invariant quand il peut être défini par une équation différentielle à coefficients constants:

$e(t)$  et  $s(t)$  sont liés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

Exemple :

$$a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt}(t) = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt}(t) + b_2 \frac{d^2s}{dt^2}(t) + s(t - \tau)$$

# Asservissement linéaire continu

## Linéarité et invariance :

D' une manière générale

$$\sum_{i=c}^{i=n} b_i \frac{d^i s}{dt^i}(t) = \sum_{i=0}^{i=m} a_i \frac{d^i e}{dt^i}(t)$$

$a_i, b_i$  sont des constantes réels t.q  $b_c, b_n, a_0, a_m$  soient non nuls

$n, m$  sont des entiers positifs t.q  $m \leq n$  pour que le système soit causal

$n$  est **l'ordre du système**

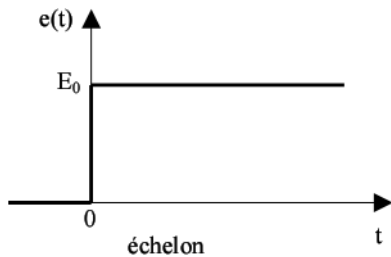
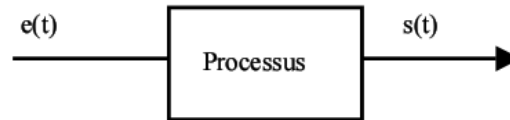
$c$  est un entier positif ou nul appelé **classe du système**,  $c \leq n$



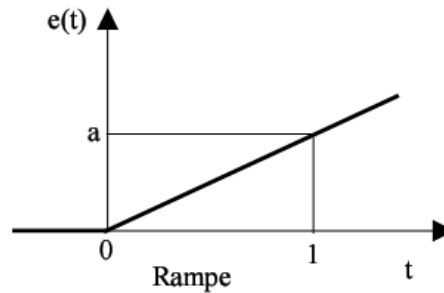
# Asservissement linéaire continu

## Réponse des systèmes à temps continu

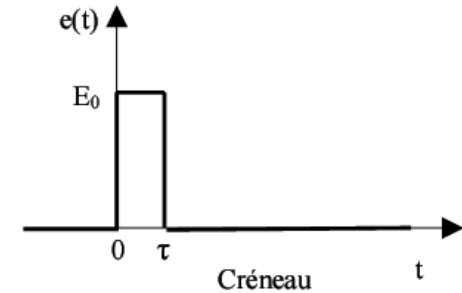
### Quelques signaux types à l'entrée du système



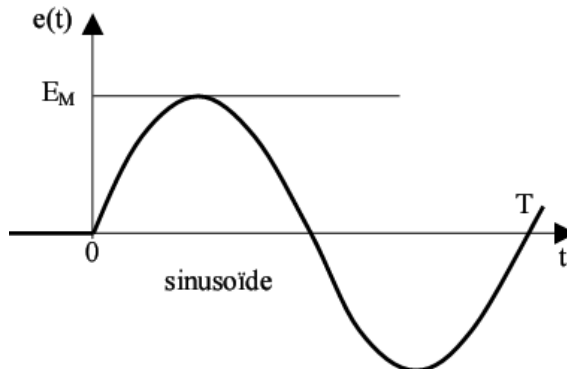
$$e(t) = E_0 v(t) \text{ avec } v(t) = 0 \quad \forall t < 0 \text{ et } v(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$$



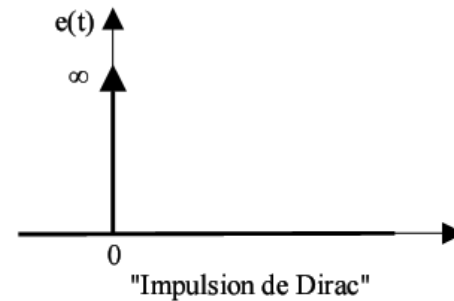
$$e(t) = at v(t)$$



$$e(t) = E_0 v(t) - E_0 v(t - \tau)$$



$$e(t) = E_M \sin \omega t v(t) \text{ avec } \omega = 2\pi f = 2\pi/T$$

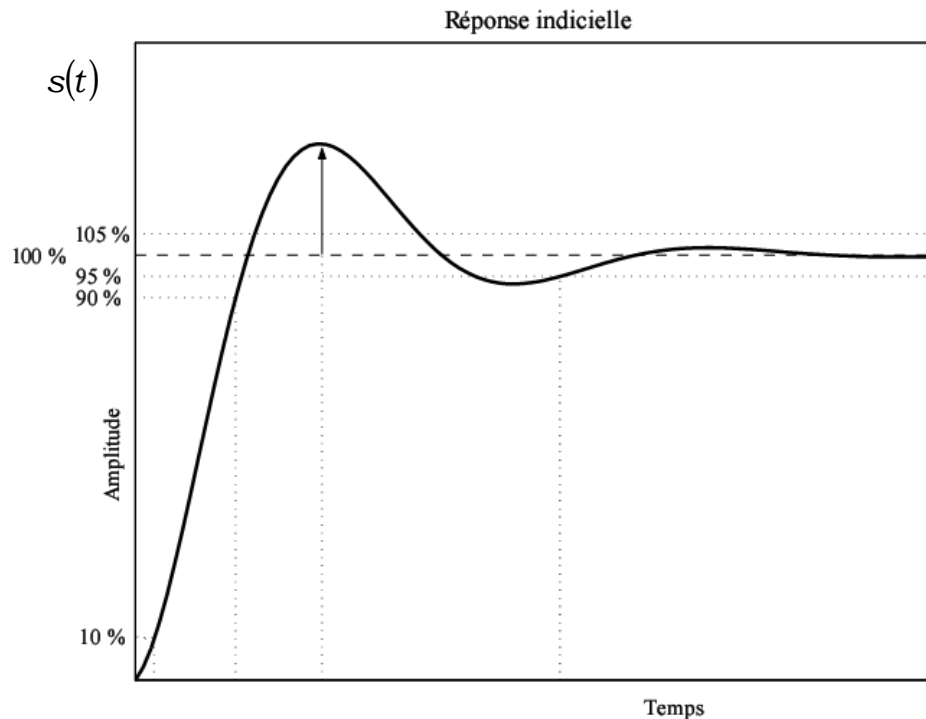


$$e(t) = \delta(t)$$

# Asservissement linéaire continu

## Réponse des systèmes à temps continu

- **Réponse indicielle** :  $C'$  est la réponse du système à un échelon unité. Elle est souvent utilisée pour caractériser un système.



# Asservissement linéaire continu

## Transformée de Laplace (TL)

- **Définition** : la transformée de Laplace d'un signal à temps continu  $f(t)$  est définie par :

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

# Asservissement linéaire continu

## Transformée de Laplace (TL)

- **Définition** : la transformée de Laplace d'un signal à temps continu  $f(t)$  est définie par :

$$F(s) = \mathfrak{S}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- **Propriétés** :

$$\mathfrak{S}\{f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)\} = F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p) \quad (\text{somme})$$

$$\mathfrak{S}\{af(t)\} = aF(p) \quad (\text{multiplication par une constante})$$

$$\mathfrak{S}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0) \quad (\text{dérivée})$$

$$\mathfrak{S}\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p^{n-n} f^{(n-1)}(0) \quad (\text{dérivée généralisée})$$

$$\mathfrak{S}\left\{\int_0^{+\infty} f(t)\right\} = \frac{1}{p} F(p) \quad \text{ssi } f(0) = 0 \quad (\text{Intégrale})$$

# Asservissement linéaire continu

## Transformée de Laplace (TL)

- **Propriétés :**

### Théorème de la valeur initiale

$$f(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

### Théorème de la valeur finale (erreur d'un asservissement)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

### Théorème du retard

$$\mathfrak{S}\{f(t - \tau)\} = e^{-\tau p} \mathfrak{S}\{f(t)\}$$

# Asservissement linéaire continu

## ● Propriétés :

**Ex**

$$\mathfrak{S}\left\{a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt}(t) = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt}(t) + b_2 \frac{d^2 s}{dt^2}(t) + s(t - \tau)\right\}$$

Somme

$$\mathfrak{S}\{a_0 e(t)\} + \mathfrak{S}\left\{a_1 \frac{de}{dt}(t)\right\} = \mathfrak{S}\{b_0 s(t)\} + \mathfrak{S}\left\{b_1 \frac{ds}{dt}(t)\right\} + \mathfrak{S}\left\{b_2 \frac{d^2 s}{dt^2}(t)\right\} + \mathfrak{S}\{s(t - \tau)\}$$

Multiplication par une constante + th. du retard

$$a_0 \mathfrak{S}\{e(t)\} + a_1 \mathfrak{S}\left\{\frac{de}{dt}(t)\right\} = b_0 \mathfrak{S}\{s(t)\} + b_1 \mathfrak{S}\left\{\frac{ds}{dt}(t)\right\} + b_2 \mathfrak{S}\left\{\frac{d^2 s}{dt^2}(t)\right\} + e^{-\tau p} \mathfrak{S}\{s(t)\}$$

Dérivée

$$a_0 E(p) + a_1 p E(p) = b_0 S(p) + b_1 p S(p) + b_2 p^2 S(p) + e^{-\tau p} S(p)$$

Relation TL(sortie) et la TL( entrée)

$$S(p) = \frac{(a_0 + a_1 p)}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + e^{-\tau p}} E(p)$$

# Asservissement linéaire continu

## Transformée de Laplace (TL)

- TL de quelques fonctions :

Fonction $e(t)$	TL $E(p)$
échelon $e(t) = \begin{cases} E_0 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$	$E(p) = \frac{E_0}{p}$
échelon retardé $e(t) = E_0 v(t - \tau) = \begin{cases} E_0 & \text{si } t \geq \tau \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases}$	$E(p) = \frac{E_0}{p} e^{-\tau p}$
rampe $e(t) = \begin{cases} at & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$	$E(p) = \frac{a}{p^2}$
créneau $e(t) = E_0 v(t) - E_0 v(t - \tau)$	$E(p) = \frac{E_0}{p} (1 - e^{-\tau p})$
sinusoïde $e(t) = E_M v(t) \sin \omega t$	$E(p) = E_m \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
Impulsion de Dirac $e(t) = \delta(t)$	$E(p) = 1$

$$TL(e^{-at}) = \frac{1}{p + a}$$

# Asservissement linéaire continu

## Théorème de plancherel

Si un système est linéaire, invariant et causal, alors nous pouvons décrire le fonctionnement du celui-ci en utilisant sa transformée de Laplace au lieu de son équation différentielle

$$a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt}(t) = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt}(t) + b_2 \frac{d^2 s}{dt^2}(t)$$

$$a_0 E(p) + a_1 p E(p) = b_0 S(p) + b_1 p S(p) + b_2 p^2 S(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 p}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}$$

$$a_0 e(t - \tau) = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt}(t)$$

$$a_0 E(p) e^{-\tau p} = b_0 S(p) + b_1 p S(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 e^{-\tau p}}{b_0 + b_1 p}$$



# Asservissement linéaire continu

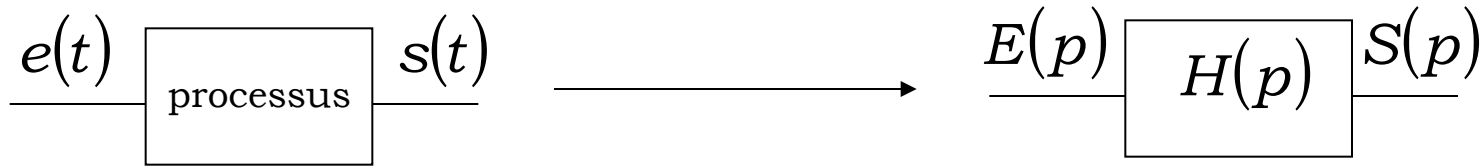
## Théorème de Plancherel

L'intérêt de la transformée de Laplace et du théorème de Plancherel réside dans la possibilité de transformer les équations différentielles décrivant l'évolution dynamique du système en équation algébrique.

# Asservissement linéaire continu

## Fonction de transfert

$$\sum_{i=c}^{i=n} b_i \frac{d^i s}{dt^i}(t) = \sum_{i=0}^{i=m} a_i \frac{d^i e}{dt^i}(t) \xrightarrow{\text{Laplace + Plancherel}} \frac{\overset{\text{sortie}}{S(p)}}{\underset{\text{entrée}}{E(p)}} = H(p)$$



On appelle le rapport  $\frac{S(p)}{E(p)} = H(p)$  la fonction de transfert ou la transmittance du système

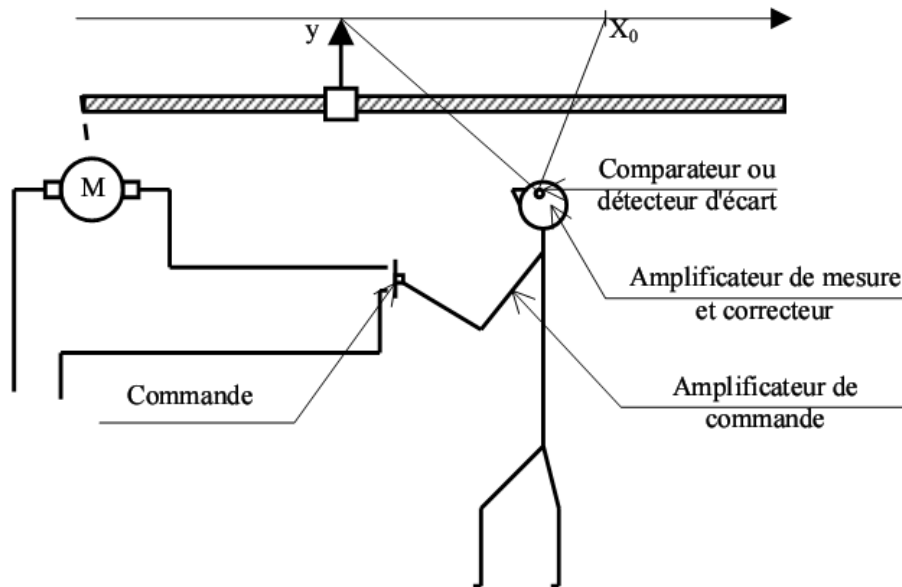
$H(p)$  est aussi la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle

# Asservissement linéaire continu

## Fonction de transfert

### Problème introductif : asservissement de position

On désire faire prendre à une plume entraînée le long d'une vis sans fin par un moteur électrique **M**, une position d'abscisse  $X_0$ .



- La personne détecte l'écart existant entre le stylet  $y$  et la position de référence  $X_0$ .
- En fonction de cet écart, il élabore une commande.
- Cette commande va faire tourner le moteur (processus) dans le bon sens avec une vitesse adaptée jusqu'à ce que  $X_0 - y$  s'annule

# Asservissement linéaire continu

## Fonction de transfert

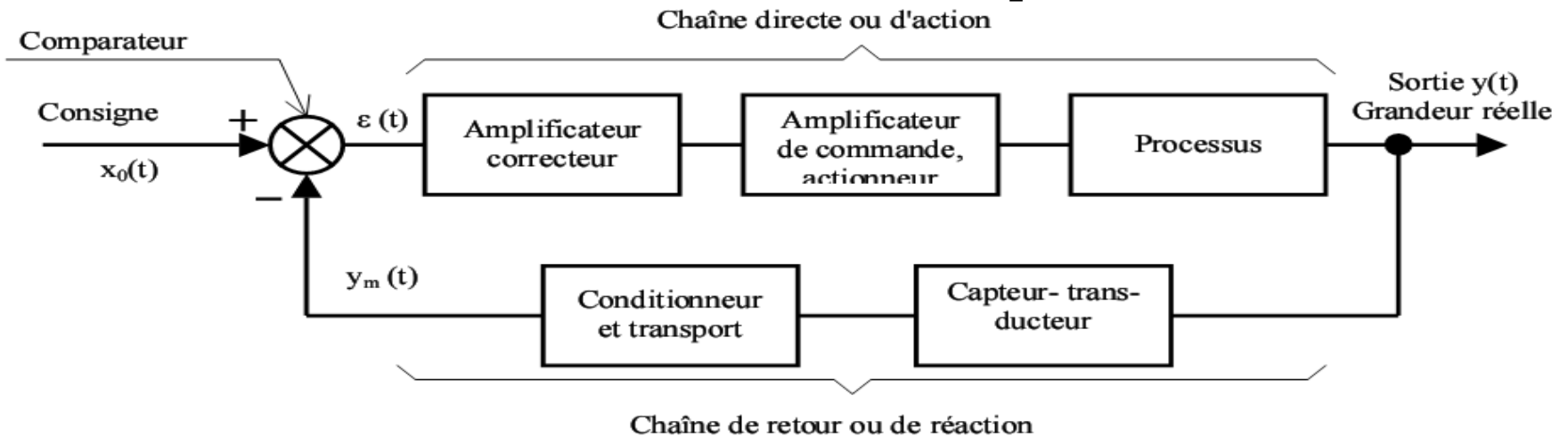
### Problème introductif : asservissement de position

L'ensemble vis, moteur, homme, plume constitue un asservissement

# Asservissement linéaire continu

## Fonction de transfert

### Problème introductif : asservissement automatique



Nous voyons apparaître sur cette figure les éléments clés d'un système asservi :

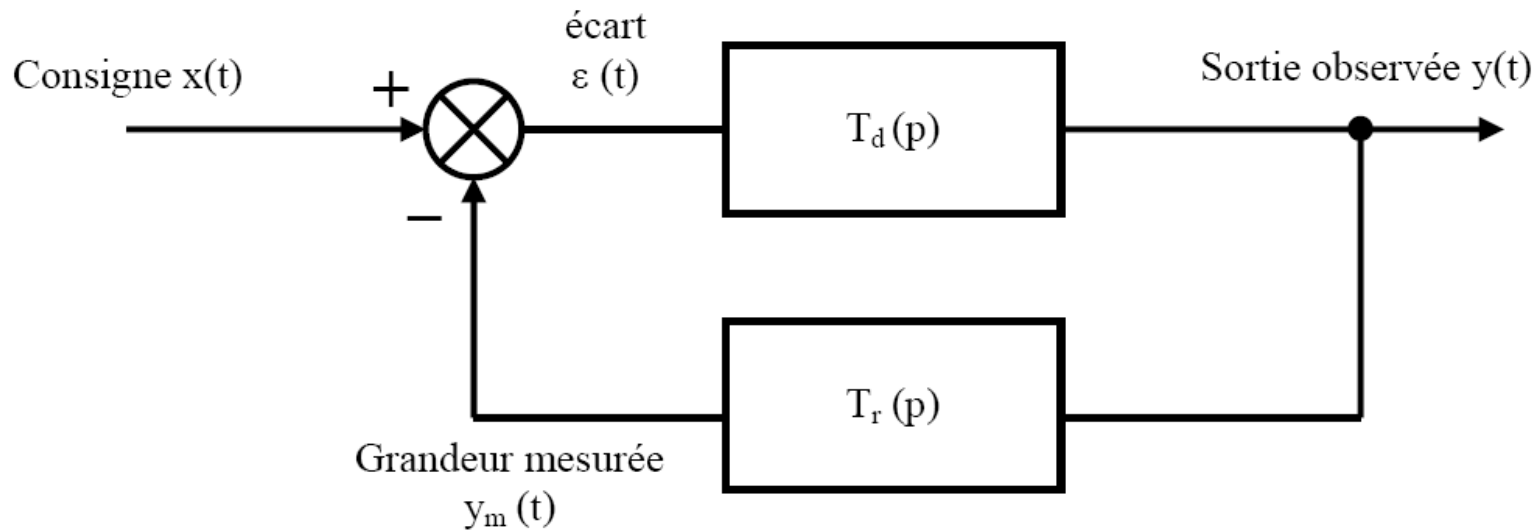
- Un système asservi est un système régi par l'écart existant entre la valeur mesurée de la grandeur asservie et sa valeur assignée, de référence ou de consigne

Le système est bouclé est fermé sur lui-même de telle sorte que  $\varepsilon(t)$  tende vers zéro

# Asservissement linéaire continu

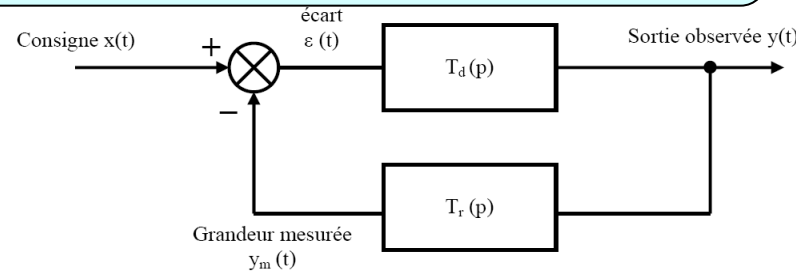
## Fonction de transfert

La forme générale d'un système asservi est :



# Asservissement linéaire continu

## Fonction de transfert



**Transmittance directe**  $T_d(p)$  :

Transmittance comprise entre la sortie observée  $Y(p)$  et l' écart  $\xi(p)$

$$T_d(p) = \frac{Y(p)}{\xi(p)}$$

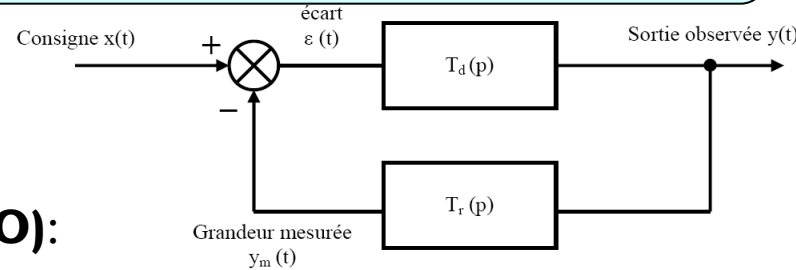
**Transmittance de retour**  $T_r(p)$ :

Transmittance comprise entre la sortie mesurée  $Y_m(p)$  et la sortie observée  $Y(p)$

$$T_r(p) = \frac{Y_m(p)}{Y(p)}$$

# Asservissement linéaire continu

## Fonction de transfert



**Transmittance en boucle ouverte  $T_{bo}(p)$  (FTBO):**

Transmittance comprise entre la sortie mesurée  $Y_m(p)$  et l' écart  $\xi(p)$

$$T_{bo}(p) = \frac{Y_m(p)}{\xi(p)}$$

**Transmittance en boucle fermée  $T_{bf}(p)$  (FTBF):**

Transmittance comprise entre la sortie observée  $Y(p)$  et la référence  $X(p)$

$$T_{bf}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{T_d(p)}{1 + T_d(p) \cdot T_r(p)} = \frac{T_d(p)}{1 + T_{bo}(p)}$$



# Asservissement linéaire continu

## Modélisation des transmittances

- Les transmittances réelles ne sont que rarement connues.
- **Leur modèle est généralement autour d'un point de fonctionnement**

**Deux modèles sont utilisés pour modéliser les fonctions de transfert**

- Modèle de connaissance (mécanique des fluides).
- **Modèle identifié .**

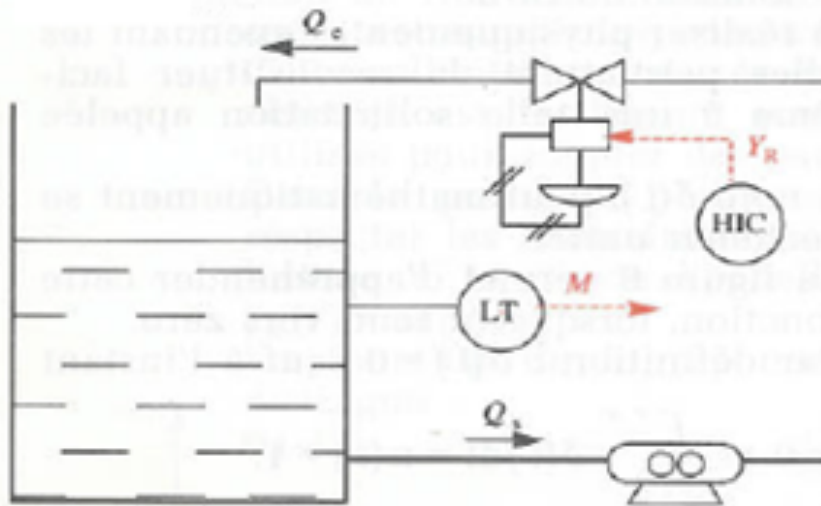
# Asservissement linéaire continu

## Modélisation des transmittances

### Modèle de connaissance :

L'industrie chimique a souvent recours au stockage intermédiaire de liquides qui peuvent être des produits de récupération ou des réactifs de base

Cet exemple concerne un bac à soutirage forcé par pompe



La relation liant une variation du débit d'entrée  $q_e(t)$  à une variation  $Y_R(t)$  du signal de commande de la vanne est

$$\tau_1 \frac{dq_e(t)}{dt} + q_e(t) = KY_R(t)$$

Et la relation liant une variation du débit d'entrée  $q_e(t)$  à une variation du débit de sortie  $q_s(t)$  est

$$\tau \frac{dq_s(t)}{dt} = q_e(t) - q_s(t)$$

# Asservissement linéaire continu

## Modélisation des transmittances

### Modèle d'identification:



- Injecter un signal d'entrée  $e(t)$  connu (échelon, Dirac, sinusoïde, .....
- Comparer la sortie ainsi obtenue  $s(t)$  avec celle de modèles connus
- Si deux sorties sont identiques, alors les deux processus ont même fonction de transfert

# III- Méthodes d'étude des systèmes asservis linéaires

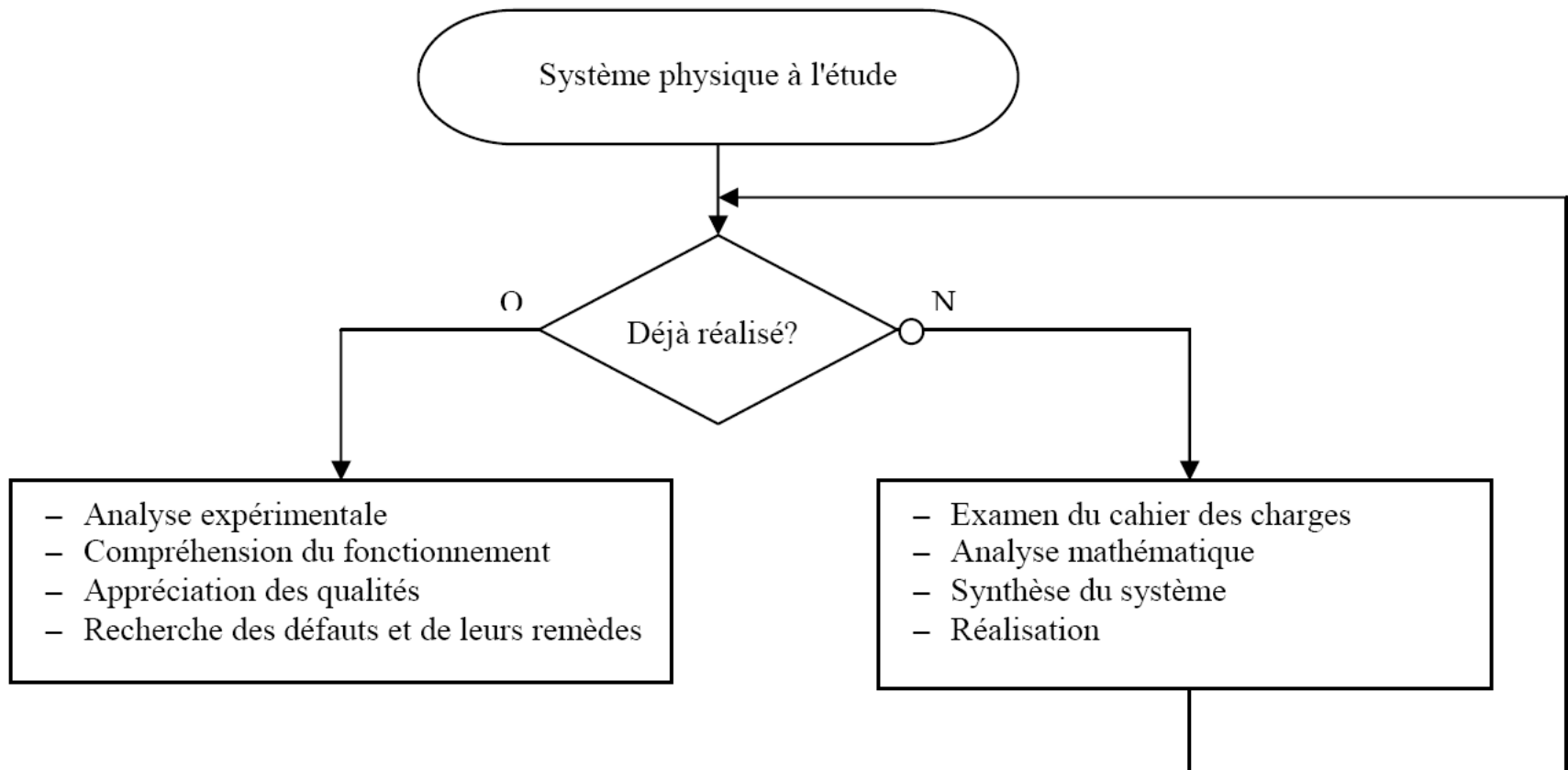
## Plan

- **Objectif de l'étude**
- **Différents modèles**
- **Signaux utilisés pour l'analyse**

# Méthodes d'étude des systèmes asservis linéaires

## Objectif de l'étude

Analyse et synthèse du système physique



# Méthodes d'étude des systèmes asservis linéaires

## Objectif de l'étude

### Analyse :

Elaboration d'un modèle à partir de l'étude mathématique ou expérimentale du comportement du système soumis à des signaux typiques

- **Echelon**
- **Impulsion brève**
- **Rampe linéaire**
- **Signal sinusoïdal**

### Exemples : ???

### Synthèse

- Connaissance du comportement des éléments de la chaîne
- Compatibilité des différents éléments entre eux

# Méthodes d'étude des systèmes asservis linéaires

## Différents modèles d'étude

- **Modèle mathématique** : équation différentielle autour du point d'étude choisi ou identification du processus
- **Modèle analogique** : assimilation du comportement d'un système nouveau à celui d'un système électronique ayant les mêmes réponses aux signaux typiques. Très coûteux et de moins en moins utilisé
- **Modèle numérique** : Simulation informatique du modèle mathématique du comportement du système
- **Modèle graphique** : Les courbes obtenues en réponse aux différents signaux typiques = Modèle mathématique obtenu par comparaison aux courbes de processus connues

# IV- Principales qualités d' un système asservi

## plan

- **Précision**
- **Temps de réponse**
- **Dépassement**
- **Stabilité**



# Principales qualités d'un système asservi

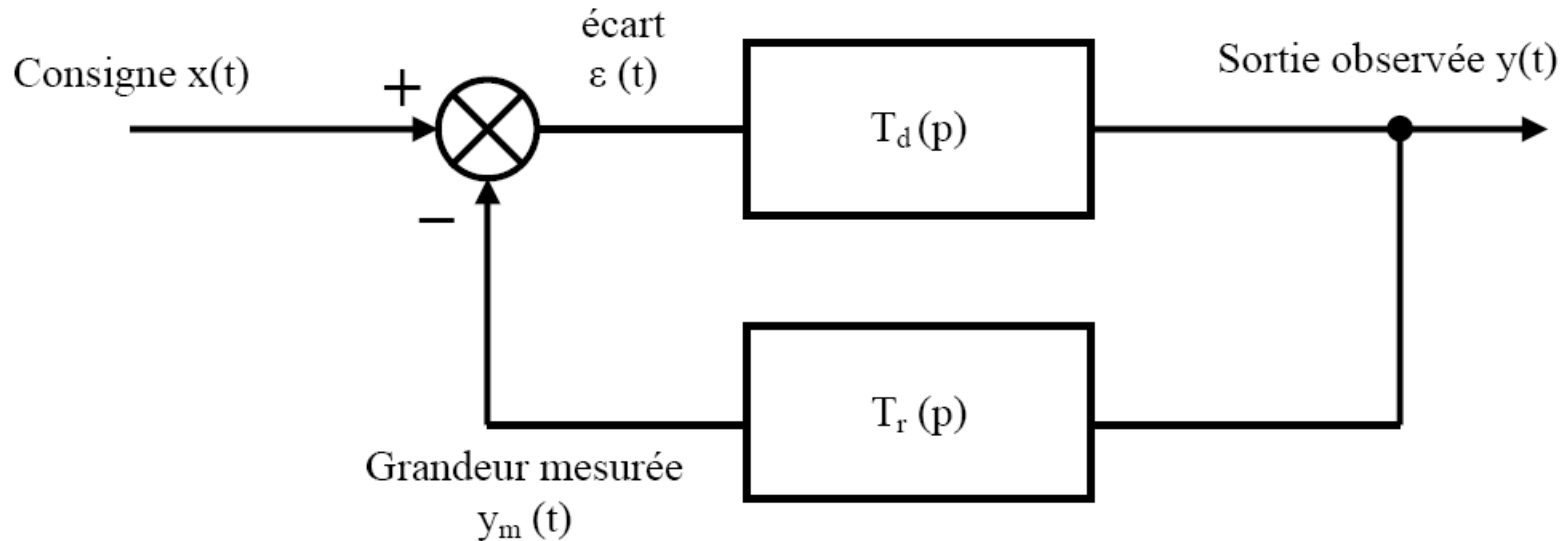
- **Asservir un système est dans le but de**
  - Obtenir une grandeur de sortie avec une **précision**
  - Atteindre la valeur finale de la grandeur de sortie avec **un Temps de réponse** prévu
  - Assurer la **stabilité** du système bouclé
  
- **Exemples**
  - Température d'un four
  - Optimisation de remplissage
  - Position du bras d'un robot
  - Hélicoptère

# Principales qualités d'un système asservi

## Précision

Erreur = grandeur mesurée – consigne

Système précis = erreur faible



$$\text{Erreur} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \varepsilon(\infty)$$

# Principales qualités d'un système asservi

## Précision

**Erreur statique** : erreur de réponse au signal échelon

$$x(t) = X_0 v(t) \Rightarrow X(p) = \frac{X_0}{p}$$

$$\varepsilon_s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{X_0}{1 + T_{bo}(p)}$$

**Erreur dynamique** : erreur de réponse au signal rampe

$$x(t) = X_0 t v(t) \Rightarrow X(p) = \frac{X_0}{p^2}$$

$$\varepsilon_d(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{X_0}{p[1 + T_{bo}(p)]}$$

# Principales qualités d'un système asservi

## Précision

**Exercices** : calculer l'erreur statique et l'erreur dynamique des systèmes suivants ayant comme fonction de transfert en BO:

$$T_{bo} = K; \quad T_{bo} = \frac{K}{1+\theta p}; \quad T_{bo} = \frac{K}{p(1+\theta p)}; \quad T_{bo} = \frac{K}{p^2(1+\theta p)}$$

Que faut il faire à la boucle ouverte pour annuler l'erreur statique

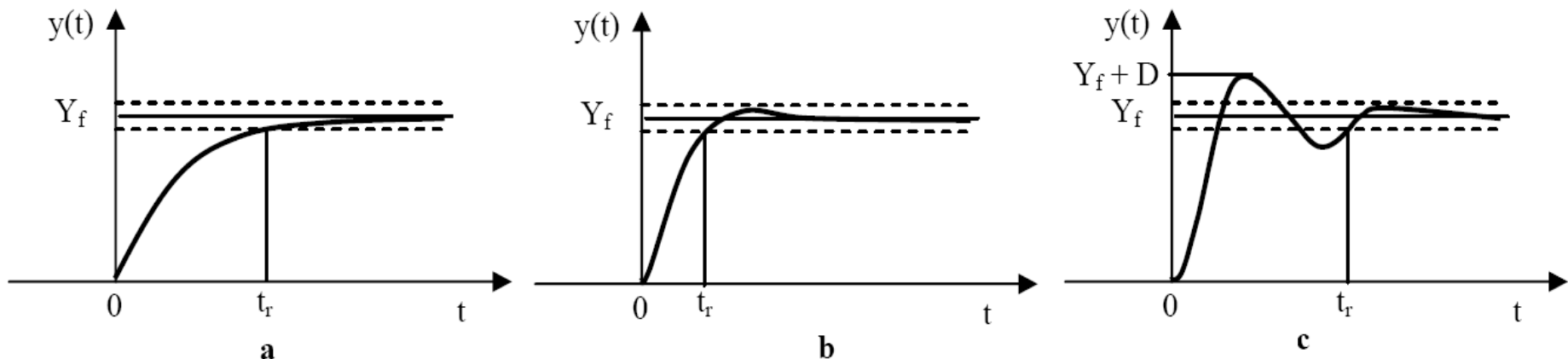
Etablir un tableau indiquant l'erreur statique et l'erreur dynamique pour des système de classe 0, 1 ou 2

# Principales qualités d'un système asservi

## Temps de réponse

**Définition :** C'est le temps que met la sortie du processus pour atteindre une zone encadrant sa valeur finale et ne plus en sortir.

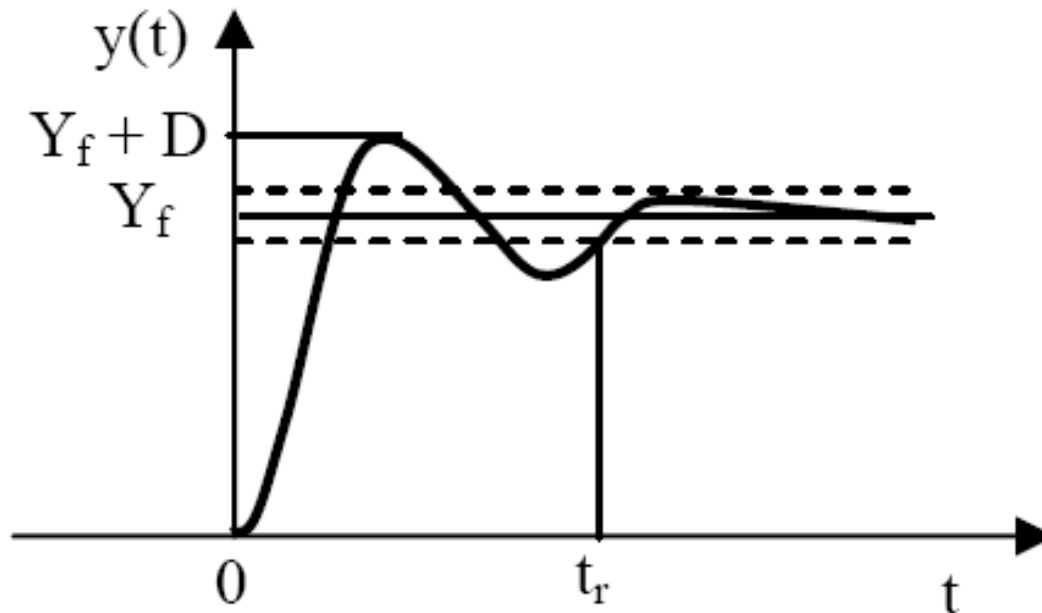
Cette zone est généralement donnée à  $\pm 5\%$



# Principales qualités d'un système asservi

## Dépassement

**Définition :** Le dépassement **D** est la différence entre la valeur maximale et la valeur finale de la grandeur physique considérée.



il est exprimé en pourcentage, soit  $D\% = \frac{D}{Y_f} \times 100$

# Principales qualités d'un système asservi

## Stabilité

**Définition naturelle:** Un système est **stable** si :

- Il reste au repos en absence d'excitation.
- Écarté de sa position d'équilibre, il y revient.

**Définition mathématique:** Un système est **stable** si :

- Toute entrée bornée produit une sortie bornée.
- Sa réponse impulsionnelle tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

# Principales qualités d'un système asservi

## Stabilité

### Critères mathématiques de la stabilité

Soit un système physique quelconque identifié sous la forme :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{\sum_{j=0}^n b_j p^j}, \quad (m < n)$$

La réponse impulsionnelle de ce système est la TL **inverse** de la transmittance H. Après décomposition en éléments simples, on peut écrire H sous la forme suivante :

$$H(p) = \sum_{k=0}^l \frac{\alpha_k}{p - p_k}, \quad (l < n), \quad \alpha_k \in R$$

$p_k$  sont les pôles de la transmittance H



# Principales qualités d'un système asservi

## Stabilité

### Critères mathématiques de la stabilité

$$H(p) = \sum_{k=0}^l \frac{\alpha_k}{p - p_k}, \quad (l < n), \quad \alpha_k \in R$$

- La TL **inverse** de cette transmittance donne la somme des réponses impulsionnelles élémentaires du système.
- Ces réponses doivent toutes tendre vers zéro quand le temps tend vers l'infini.
- Si une seule de ces réponses est instable, le système serait alors instable.

# Principales qualités d'un système asservi

## Stabilité

### Critères mathématiques de la stabilité

$$H(p) = \sum_{k=0}^l \frac{\alpha_k}{p - p_k}, \quad (l < n), \quad \alpha_k \in R$$

**Un système est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative**

# Principales qualités d'un système asservi

## Stabilité

### Critères de stabilité de Routh

Il n'est pas toujours facile de calculer explicitement les pôles de la fonction de transfert. Dans ce cas, il est possible d'apprécier la stabilité en utilisant le critère de Routh.

Soit

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

### Enoncé du critère de Routh

Un système de fonction de transfert  $H(p)$  est stable si et seulement si tous les coefficients de son dénominateur  $D(p)$  sont strictement positifs **et** que tous les termes de la première colonne du tableau de Routh sont strictement positifs.

# Principales qualités d'un système asservi

## Stabilité

### Critères de stabilité de Routh

Soit  $D(p) = \sum_{j=0}^n b_j p^j = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0$ . Le tableau de Routh est défini de la manière suivante :

$p^n$	$b_n$	$b_{n-2}$	$b_{n-4}$	---
$p^{n-1}$	$b_{n-1}$	$b_{n-3}$	$b_{n-5}$	---
--	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	---
--	$\gamma$	$\gamma$	---	---
--	---	---	---	---
P	---	---	---	---
$p^0$	---	---	---	---

$$\beta_1 = \frac{b_{n-1} \cdot b_{n-2} - b_n \cdot b_{n-3}}{b_{n-1}} ; \beta_2 = \frac{b_{n-1} \cdot b_{n-4} - b_n \cdot b_{n-5}}{b_{n-1}} ; \text{etc.}$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1 \cdot b_{n-3} - b_{n-1} \cdot \beta_2}{\beta_1} ; \gamma_2 = \frac{\beta_1 \cdot b_{n-5} - b_{n-1} \cdot \beta_3}{\beta_1} ; \text{etc.}$$

Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des zéros

# Principales qualités d'un système asservi

## Stabilité

### Critères de stabilité de Routh

Exemple :  $D(p) = p^3 + 3p^2 + 2p + K + 1. \quad K \in R$

$p^n$	$b_n$	$b_{n-2}$	$b_{n-4}$	----
$p^{n-1}$	$b_{n-1}$	$b_{n-3}$	$b_{n-5}$	----
--	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	----
--	$\gamma$	$\gamma$	----	----
--	----	----	----	----
P	----	----	----	----
$p^0$	----	----	----	----

$$\beta_1 = \frac{b_{n-1} \cdot b_{n-2} - b_n \cdot b_{n-3}}{b_{n-1}} ; \beta_2 = \frac{b_{n-1} \cdot b_{n-4} - b_n \cdot b_{n-5}}{b_{n-1}} ; \text{etc.}$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1 \cdot b_{n-3} - b_{n-1} \cdot \beta_2}{\beta_1} ; \gamma_2 = \frac{\beta_1 \cdot b_{n-5} - b_{n-1} \cdot \beta_3}{\beta_1} ; \text{etc.}$$

Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des zéros

# Principales qualités d'un système asservi

## Stabilité

### Critères de stabilité de Routh

Exemple :  $D(p) = p^3 + 3p^2 + 2p + K + 1. \quad K \in R$

$P^3$	1	2	0
$P^2$	3	$K+1$	0
$P^1$	$\frac{6 - (K+1)}{3}$	0	0
$P^0$	$K+1$	0	

Stable si:

$$K+1 > 0 \Rightarrow K > -1; \quad \frac{6-K-1}{3} > 0 \Rightarrow K < 5; \quad \underline{0 < K < 5}$$

# Principales qualités d'un système asservi

## Stabilité

### Critères de stabilité de Routh

#### Remarques:

- Le nombre de changement de signes dans la première colonne du tableau de Routh correspond au nombre de pôles instables du système.
- Un système stable en boucle ouverte peut ne pas l'être en boucle fermée. Il convient donc d'examiner la stabilité du système bouclé.
- Le critère de Routh est binaire : **stable ou instable**. Il ne permet pas d'apprécier le degré de stabilité ni le comportement du système en présence de signaux typiques.
- D'autres techniques sont donc nécessaires afin de prévoir avec un minimum de risques le comportement des systèmes bouclés.

# V- Etude temporelle

## Plan

- **Réponse indicielle**
  - **Système du premier ordre**
  - **Système du second ordre**



# Étude temporelle

## Réponse indicielle

Le réponse d'un système à un échelon

Elle permet la caractérisation complète du régime permanent

- **Système du premier ordre**

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

$\tau$  est la constante du temps du système et  $K$  le gain statique

# Étude temporelle

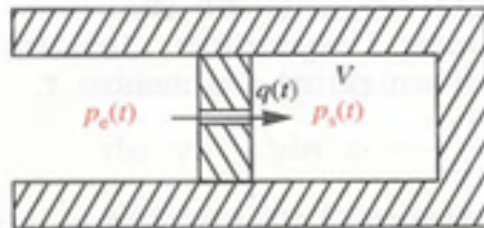
## Réponse indicielle

Le réponse d'un système à un échelon

Elle permet la caractérisation complète du régime permanent

### Exemple : association restriction-volume

Une enceinte close de volume  $V$  constant est en communication avec un dispositif extérieur à la pression  $p_e(t)$ , par l'intermédiaire d'un diaphragme de section réduite, communément appelé restriction. Une telle restriction s'oppose à un équilibrage instantané des pressions  $p_s(t)$  et  $p_e(t)$ , lorsque cette dernière évolue.

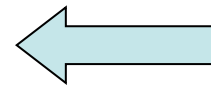
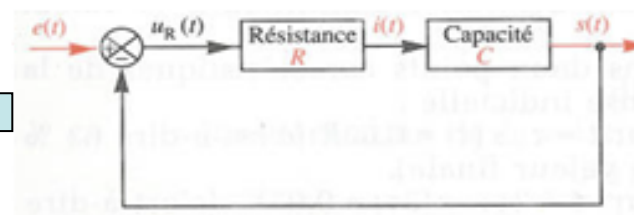
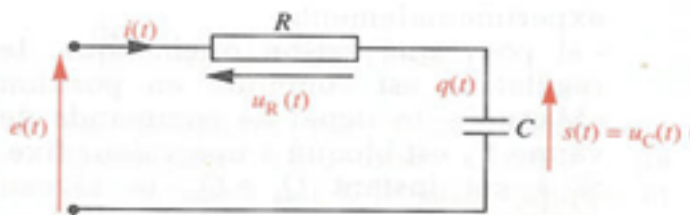
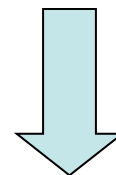
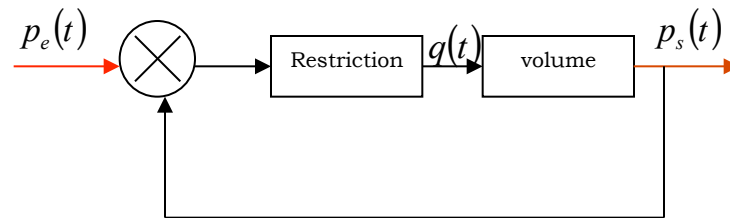
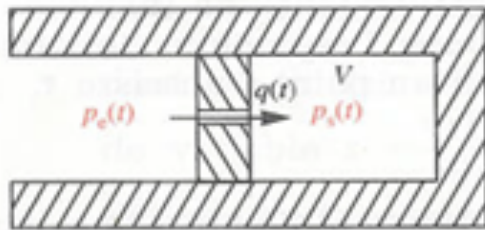


# Étude temporelle

## Réponse indicielle

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

### ● Système du premier ordre



$$p_e(t) \rightarrow e(t)$$

$$p_s(t) \rightarrow s(t)$$

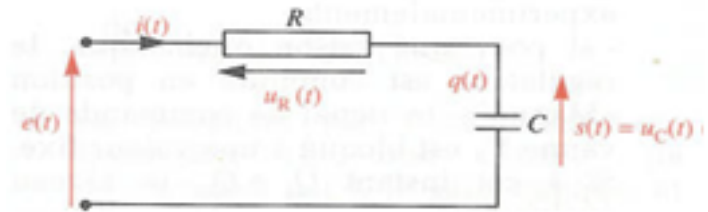
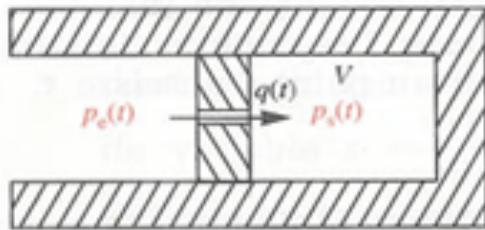
$$q(t) \rightarrow i(t)$$

# Étude temporelle

## Réponse indicielle

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

● **Système du premier ordre : analogie Electricité-mécanique des fluides**



$$p_e(t) \rightarrow e(t)$$

$$p_s(t) \rightarrow s(t)$$

$$q(t) \rightarrow i(t)$$

$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$



$$\tau \frac{dp_s(t)}{dt} + p_s(t) = p_e(t)$$

$$\frac{P_s}{P_e} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

# Étude temporelle

## Réponse indicielle

- **Système du premier ordre**

On a un système du premier ordre dont la FT est

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \Leftrightarrow \begin{array}{c} E(p) \\ \hline \boxed{H(p)} \\ \hline S(p) \end{array} \Leftrightarrow S(p) = H(p)E(p)$$

On cherche à caractériser la réponse indicielle d'un tel système. On suppose que l'échelon est unité

$$E(p) = \frac{X_0}{p}$$

$$S(p) = \frac{KX_0}{p(1 + \tau p)} = KX_0 \left( \frac{1}{p} + \frac{-\tau}{1 + \tau p} \right)$$

et finalement

$$s(t) = KX_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

# Étude temporelle

## Réponse indicielle

- **Système du premier ordre**

$$s(t) = KX_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

**Astuces** : C' est l' allure de la courbe qui nous intéresse, quelques valeurs clés suffisent

$$s(0) = 0, \quad s(\infty) = KX_0 \Rightarrow \text{Limites connues}$$

$$\dot{s}(t) = \frac{KX_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \dot{s}(0) = \frac{KX_0}{\tau} \Rightarrow \text{Pente à l' origine connue}$$

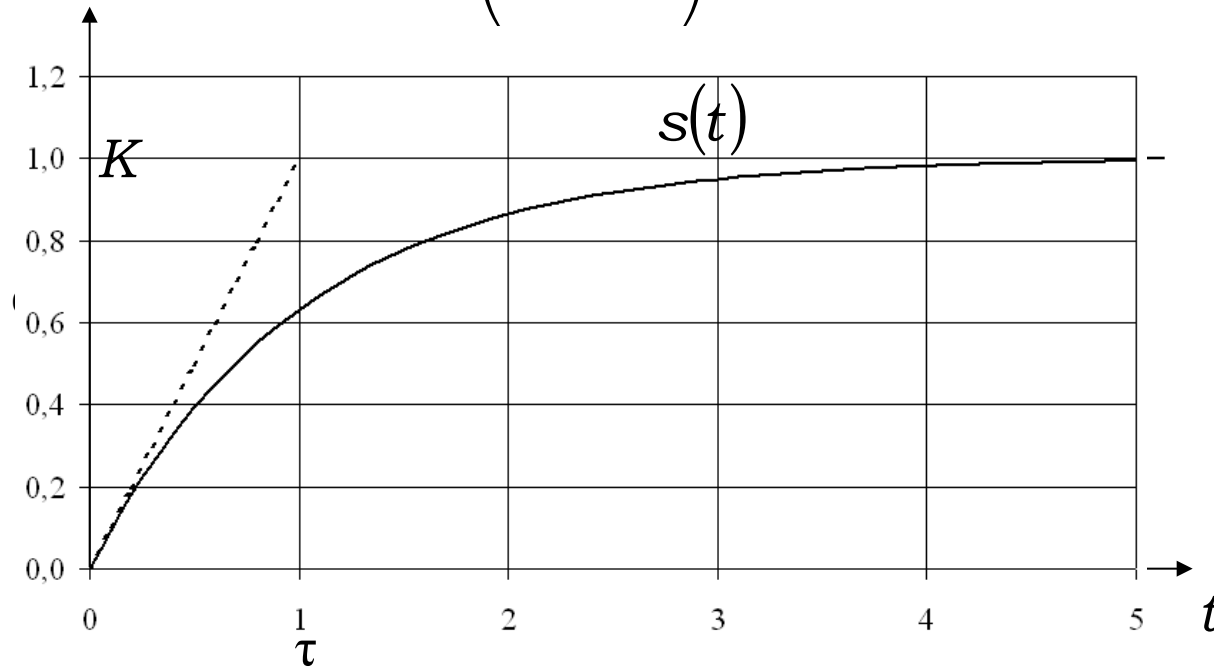
$$\dot{s}(t) = 0 \Rightarrow t \rightarrow \infty \Rightarrow s_{max} = s(\infty)$$

# Étude temporelle

## Réponse indicielle

- **Système du premier ordre**

$$s(t) = KX_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$



Réponse indicielle pour  $K=1$  et  $\tau = 1$

# Étude temporelle

## Réponse indicielle

- **Système du second ordre**

Tout système dans la fonction de transfert est sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\theta p + \theta^2 p^2} \Leftrightarrow H(p) = \frac{K}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}$$

$\xi$  est le **coefficient d'amortissement**,  $\theta$  la constante du temps ( $\omega_n$  pulsation propre du système) et  $K$  le gain statique.

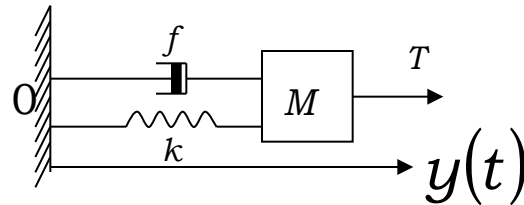


# Étude temporelle

## Réponse indicielle

### Exemple

Une masse retenue à un mur par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux  $f$ , et un ressort d'amortissement  $k$ , que l'on tire avec une tension  $T$  vers la droite



On s'intéresse cette fois à la position du solide  $M$ ,

$$\sum \vec{Forces} = M\ddot{y}(t) \Leftrightarrow T(t) - f\dot{y}(t) - ky(t) = M\ddot{y}(t)$$

Comme on considère que tous nos systèmes sont causaux (initialement au repos)

$$T(p) - fpY(p) - kY(p) = Mp^2Y(p)$$

# Étude temporelle

## Réponse indicielle

- **Système du second ordre**

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\theta p + \theta^2 p^2} \Leftrightarrow H(p) = \frac{K}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}$$

Deux racines se présentent selon le coefficient d'amortissement  $\xi$

$$\xi \geq 1 \Rightarrow \text{Les deux racines sont réelles et simples} \quad p_{1/2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_n$$

$$\xi < 1 \Rightarrow \text{Les deux racines sont complexes conjuguées} \quad p_{1/2} = \left(-\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2}\right)\omega_n$$

# Étude temporelle

## Réponse indicielle

- **Système du second ordre**  $\xi \geq 1$

$$\xi \geq 1 \Rightarrow H(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

La TL de la réponse indicielle  $S(p)$  :

$$S(p) = \frac{KX_0\omega_n^2}{p(p - p_1)(p - p_2)} = KX_0\omega_n^2 \left[ \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{(p - p_1)} + \frac{c_3}{(p - p_2)} \right]$$

$$c_1 = \frac{1}{p_1 p_2}; c_2 = \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)}; c_3 = \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)}$$

$$s(t) = \frac{KX_0\omega_n^2}{p_1 p_2} \left[ 1 + \frac{p_2}{(p_1 - p_2)} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{(p_2 - p_1)} e^{p_2 t} \right]$$

# Étude temporelle

## Réponse indicielle

- **Système du second ordre**  $\xi \geq 1$

$$\dot{s}(t) = \frac{KX_0\omega_n^2}{p_1p_2} \left[ \frac{p_2p_1}{(p_1 - p_2)} e^{p_1t} + \frac{p_1p_2}{(p_2 - p_1)} e^{p_2t} \right]$$

$$s(0) = 0, \quad s(\infty) = KX_0 \Rightarrow \text{Limites connues}$$

$$\dot{s}(0) = 0, \quad \dot{s}(\infty) = 0 \Rightarrow \text{Pente à l'origine et à l'infini sont connues}$$

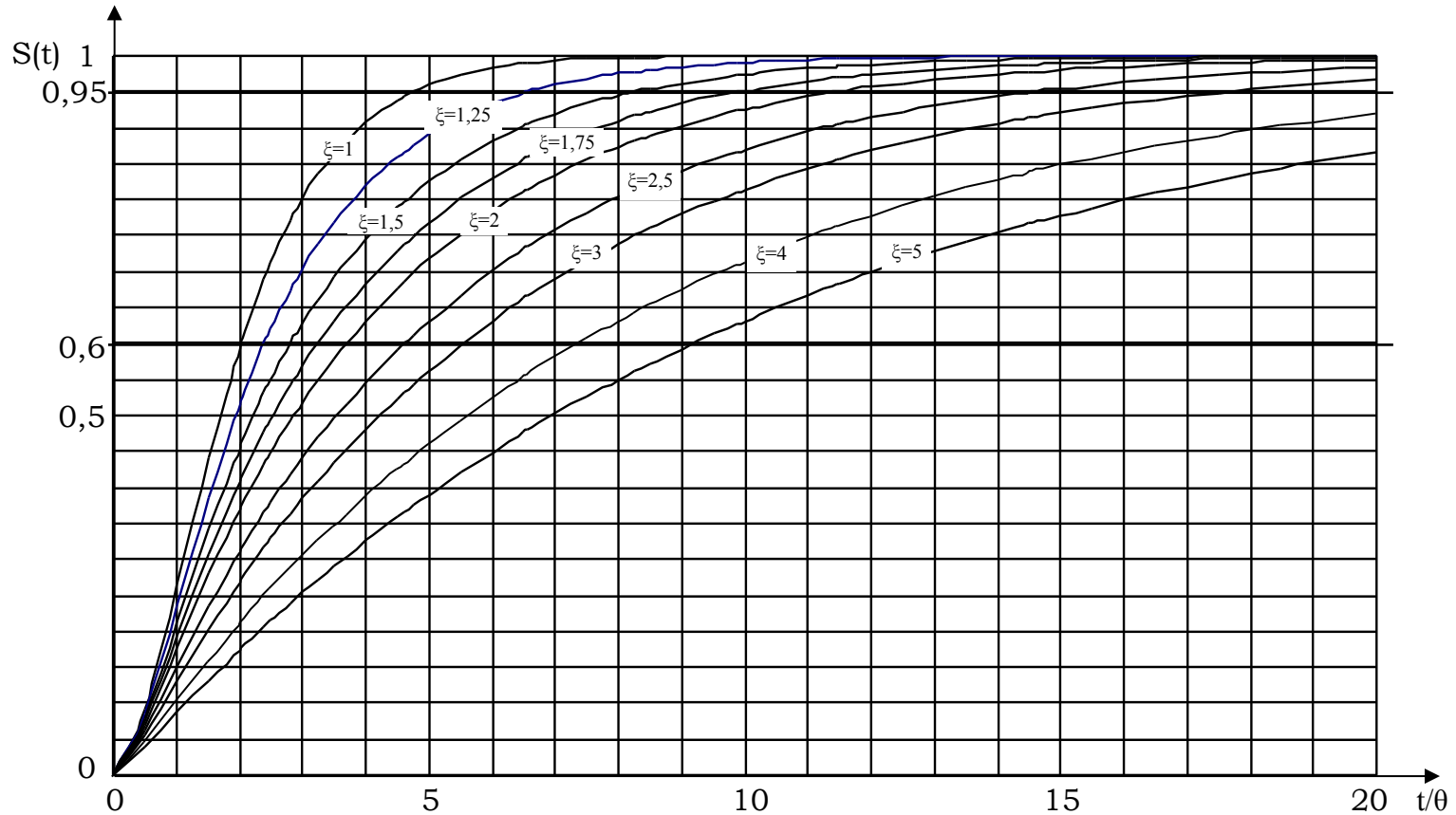
$$\dot{s}(t) = 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \text{ ou } \infty \Rightarrow s_{max} = s(\infty)$$

Tangente horizontale à l'origine

# Étude temporelle

## Réponse indicielle

- Système du second ordre  $\xi \geq 1$



# Étude temporelle

## Réponse indicielle

- **Systeme du second ordre  $\xi \geq 1$  : valeurs approximatives**

$\xi$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5
$t/\theta$ pour $s=0,6$	2,02	2,39	2,81	3,25	3,70	4,60	5,50	7,34	9,10
$t/\theta$ pour $s=0,95$	4,74	6,57	8,26	9,88	11,46	14,57	17,63	23,71	29,50
$t_{0,95}/t_{0,6}$	2,35	2,74	2,94	3,04	3,10	3,16	3,21	3,23	3,24

# Étude temporelle

## Réponse indicielle

- **Système du second ordre**  $\xi < 1$

$$\xi < 1 \Rightarrow S(p) = \frac{KX_0\omega_n^2}{p(p - p_1)(p - \bar{p}_1)}$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{KX_0\omega_n}{p_1\bar{p}_1} \left[ 1 + \frac{\bar{p}_1}{p_1 - \bar{p}_1} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{\bar{p}_1 - p_1} e^{\bar{p}_1 t} \right]$$

$$\Rightarrow \dot{s}(t) = -j \frac{KX_0\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left[ e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t\right) \right]$$

# Étude temporelle

## Réponse indicielle

- **Système du second ordre**  $\xi < 1$

$$\dot{s}(t) = -j \frac{KX_0\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[ e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t\right) \right]$$

$$s(0) = 0, \quad s(\infty) = X_0 K \Rightarrow \text{Limites connues}$$

$$\dot{s}(0) = 0, \quad \dot{s}(\infty) = 0 \Rightarrow \text{Pente à l'origine et à l'infini connues}$$

$$\dot{s}(t) = 0 \Rightarrow \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t = k\pi \Rightarrow t = \frac{kx_0\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

La sortie présente une suite d'extremas espacés périodiquement

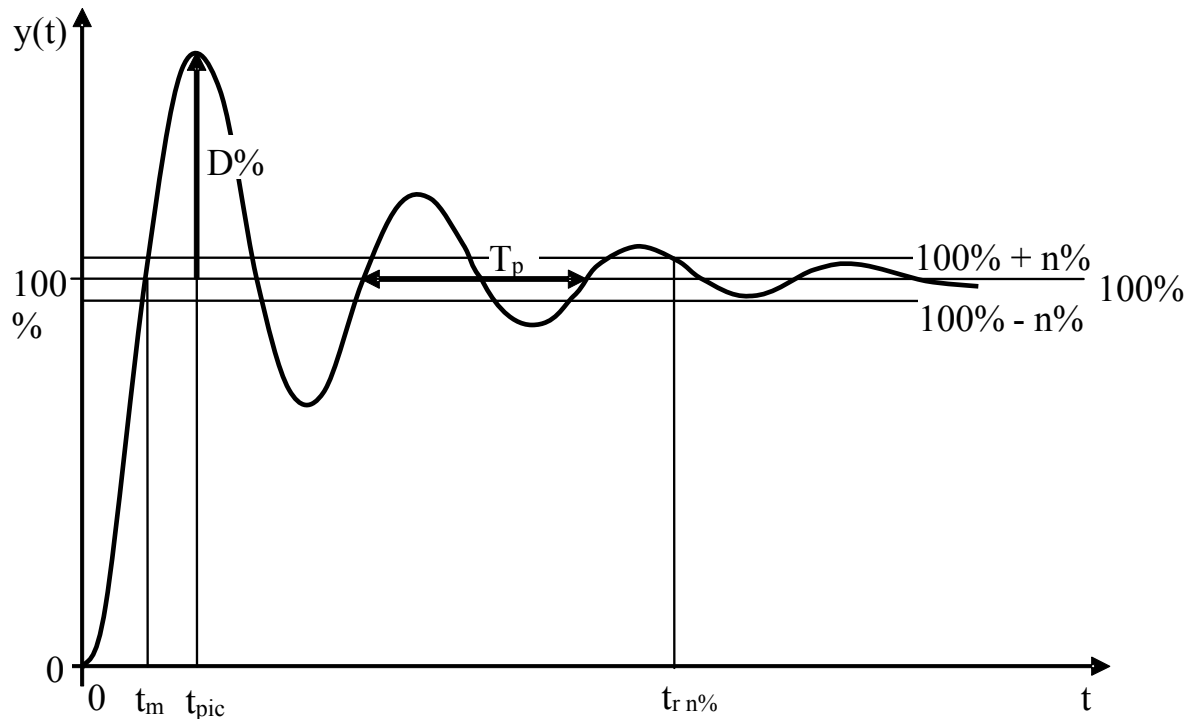
**La sortie oscille  $\implies$  elle présente un dépassement**



# Étude temporelle

## Réponse indicielle

- Système du second ordre  $\xi < 1$



# Étude temporelle

## Réponse indicielle

Valeurs numériques						
$\xi$	$t_{rs}\omega_n = t_{rs}/\theta$	D%	$t_{pic}\omega_n = t_{pic}/\theta$	$T_p\omega_n = T_p/\theta$	$\omega_p/\omega_n$	$\xi$
0,05	60,0	85,4	3,15	6,29	1,00	0,05
0,10	30,0	72,9	3,16	6,31	0,99	0,10
0,15	20,0	62,1	3,18	6,36	0,99	0,15
0,20	14,0	52,7	3,21	6,41	0,98	0,20
0,25	11,0	44,4	3,24	6,49	0,97	0,25
0,30	10,1	37,2	3,29	6,59	0,95	0,30
0,35	7,9	30,9	3,35	6,71	0,94	0,35
0,40	7,7	25,4	3,43	6,86	0,92	0,40
0,45	5,4	20,5	3,52	7,04	0,89	0,45
0,50	5,3	16,3	3,63	7,26	0,87	0,50
0,55	5,3	12,6	3,76	7,52	0,84	0,55
0,60	5,2	9,5	3,93	7,85	0,80	0,60
0,65	5,0	6,8	4,13	8,27	0,76	0,65
0,70	3,0	4,6	4,40	8,80	0,71	0,70
0,707	2,93	4,3	4,44	8,88	0,71	0,707
0,75	3,1	2,8	4,75	9,50	0,66	0,75
0,80	3,4	1,5	5,24	10,47	0,60	0,80
0,85	3,7	0,6	5,96	11,93	0,53	0,85
0,90	4,0	0,2	7,21	14,41	0,44	0,90
0,95	4,1	0,0	10,06	20,12	0,31	0,95

# VI- Etude en régime sinusoïdal pure

## Plan

- **Généralité**
  - **Nyquist**
  - **Bode**
  - **Black**
- **Identification**

# Etude en régime sinusoïdal pure

## Généralités

- Etude en régime sinusoïdal :  $H(j\omega)$
- Régime sinusoïdal permanent ( $p|_{j\omega}$ ): régime transitoire terminé
- Renseignements sur la stabilité **en boucle fermée**, l'ordre, la présence de zéros et l'identification de la plupart des systèmes
- Différentes méthodes graphiques existent :

**Diagramme de Nyquist**

**Diagramme de Bode**

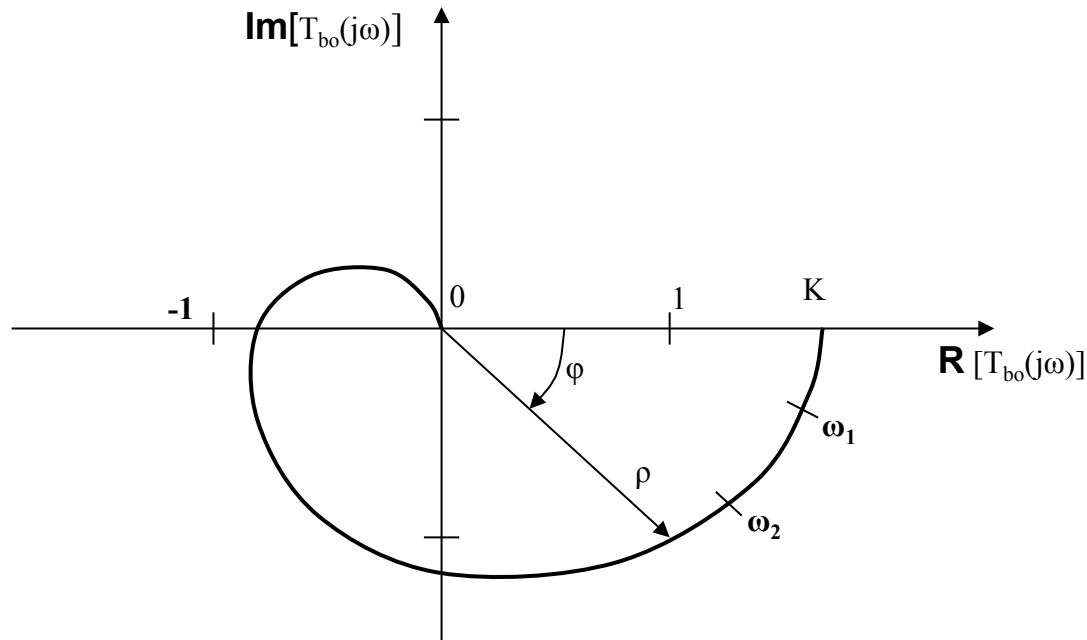
**Diagramme de Black**

**Diagramme de Black et Nickols**

# Etude en régime sinusoïdal pure

## Généralités

### Plan de Nyquist

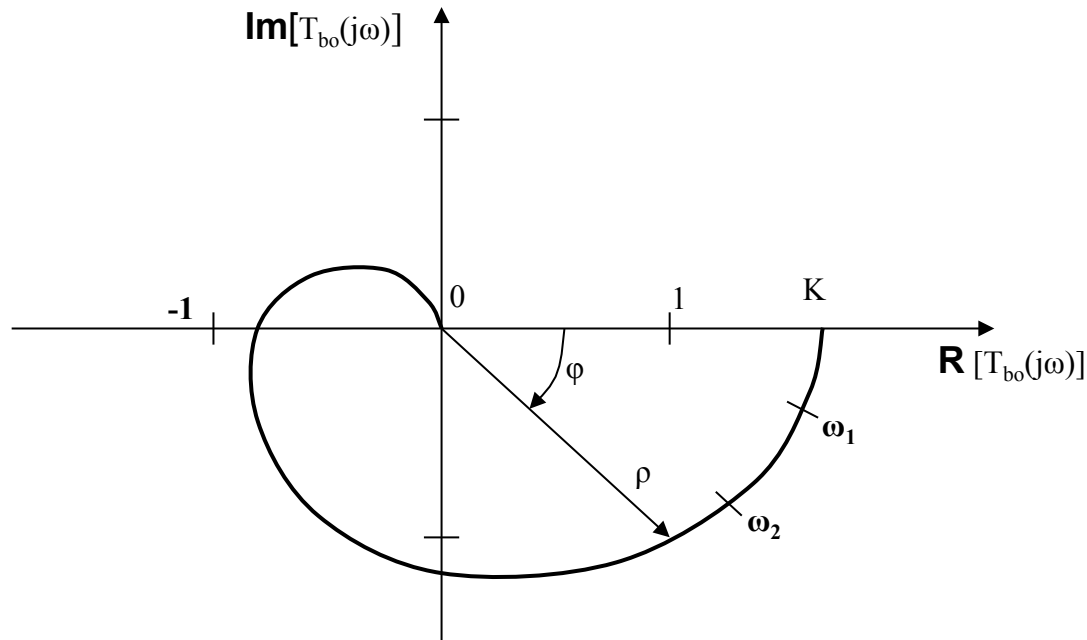


- Paramétrée par les valeurs de  $\omega$
- Un système est stable en boucle fermée si le point critique d'abscisse **-1** est laissé à gauche de la courbe : Appréciation de la stabilité d'un simple coup d'œil.

# Etude en régime sinusoïdal pure

## Généralités

### Plan de Nyquist



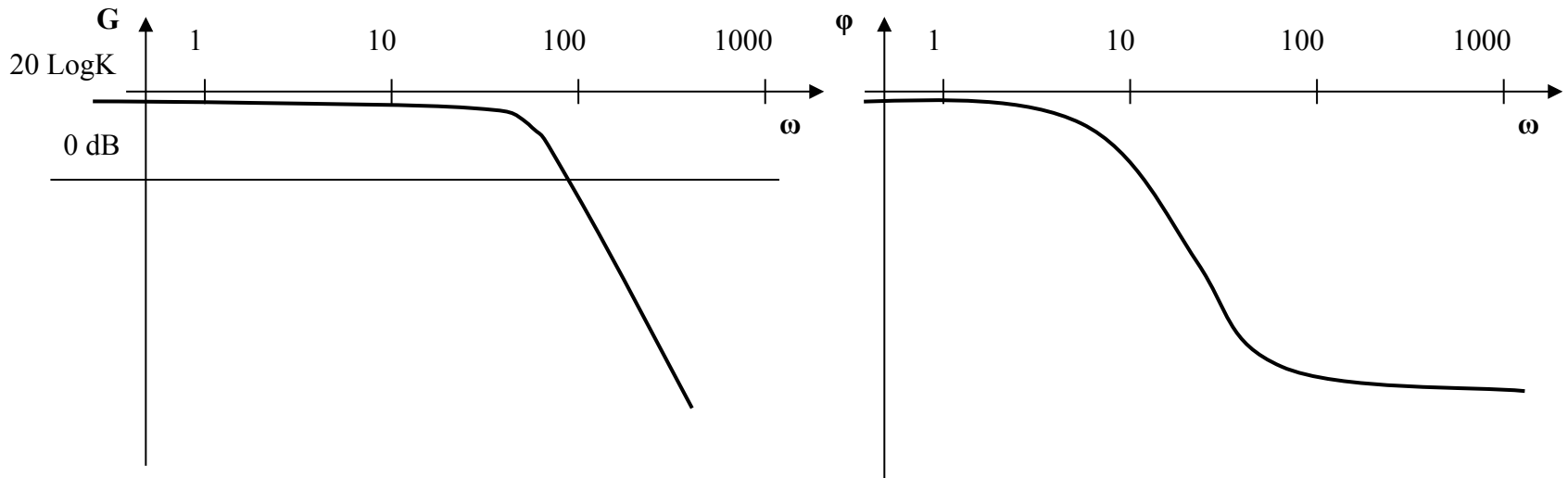
- Il n'est pas aisé pour une valeur particulière de  $\omega$  de déterminer le gain  $\rho$ , le déphasage  $\varphi$  ni de faire varier le paramètre  $K$
- Il faut retracer la courbe pour chaque valeur de  $K$

## Identification difficile

# Etude en régime sinusoïdal pure

## Généralités

### Plan de Bode



Le gain en dB

$$G = 20 \log_{10} \|Tbo(j\omega)\| (dB)$$

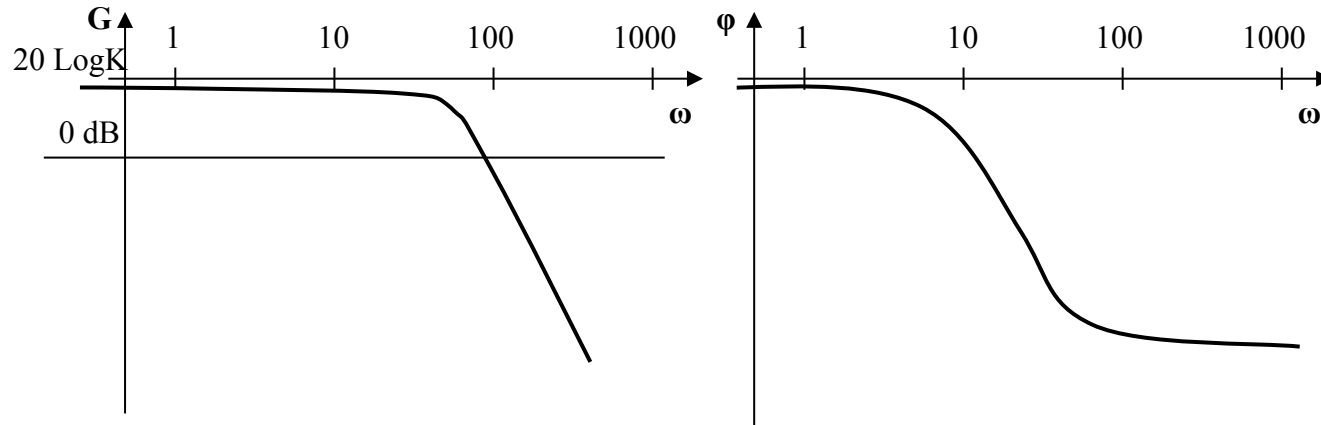
Le déphasage en degrés

$$\varphi = \text{Arctg} \frac{\text{Im}[Tbo(j\omega)]}{\text{R}[Tbo(j\omega)]}$$

# Etude en régime sinusoïdal pure

## Généralités

### ● Plan de Bode



- Il est très facile pour une valeur particulière de  $\omega$  de connaître de gain de la  $Tbo(j\omega)$  et le déphasage  $\varphi$
- Pour varier la valeur de  $K$ , il suffit de faire glisser la courbe de gain
- Appréciation difficile de la stabilité en boucle fermée

Exemple : Déterminer le gain et le déphasage du système suivant :

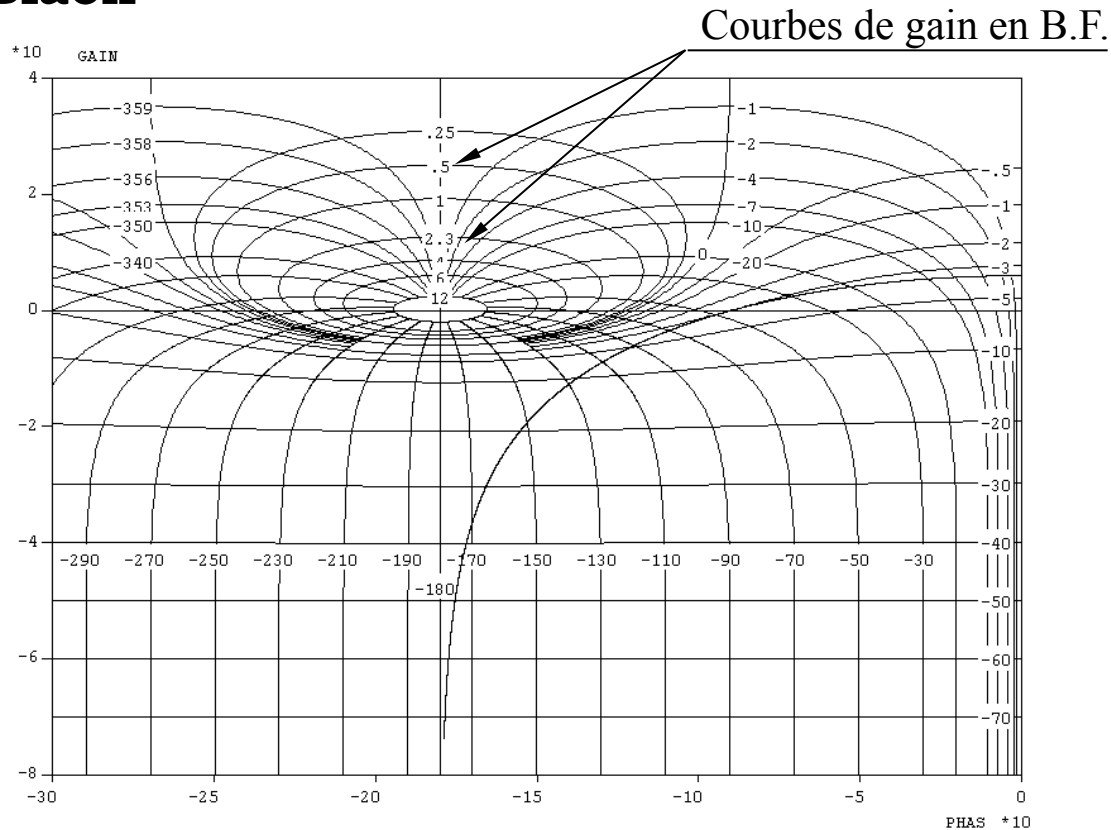
$$Tbo(p) = \frac{K}{1 + \theta P}$$



# Etude en régime sinusoïdal pure

## Généralités

### ● Plan de Black



• La courbe  $G = f(\varphi)$  paramétrée en  $\omega$

• Intéressante pour vérifier la stabilité en BF et de se faire une idée de son comportement

# Etude en régime sinusoïdal pure

## Identification

### ● Méthode manuelle

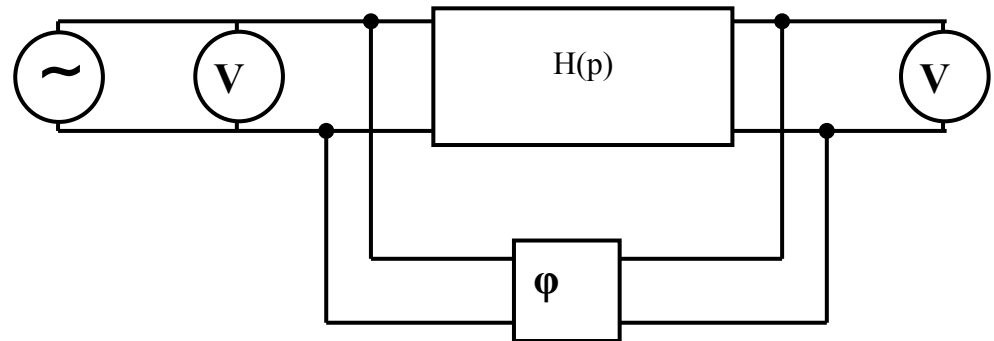
- Appliquer à l'entrée d'un système inconnu un signal sinusoïdal de fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  variable.
- De mesurer les amplitudes de l'entrée et de la sortie ainsi que leur déphasages
- Tracer les courbes de gain et de phase dans le plan de Bode et en déduire la fonction de transfert  $H(p)$  du dit système

# Etude en régime sinusoïdal pure

## Identification

### • dans le commerce

- Il existe dans le commerce des appareils appelés transféromètre qui possèdent un générateur de signaux sinusoïdaux à fréquence variable, un voltmètre et un phasemètre.
- Ce type d'appareil trace directement sur table traçante ou sur imprimante les courbes de gain et de phase.
- Certains possèdent une aide à l'identification.



# VII- Etude dans le plan de Bode

## But

- **Étude de la stabilité en traçant  $Tbo(j\omega)$**
- **Identification des systèmes inconnus**

## Plan

- **Étude d'un système du 1<sup>er</sup> ordre**
- **Étude d'un système du 1<sup>er</sup> ordre avec retard pure**
- **Étude d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre factorisable**
- **Étude d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre non factorisable**
- **Étude d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre avec intégrateur**
- **Étude d'un filtre à avance de phase**

# Etude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du premier ordre

$$Tbo(p) = \frac{K}{1 + \theta p}$$

$\theta$  est la constante du temps et  $K$  le gain statique

$$Tbo(j\omega) = \frac{K}{1 + \theta j\omega} \quad \text{Calculer le gain } G \text{ et le déphasage } \varphi \quad [\omega(\text{rad/s})]$$

$$G = 20 \log_{10} \|Tbo(j\omega)\| = 20 \log_{10} \frac{K}{\sqrt{1 + \theta^2 \omega^2}} = 20 \log_{10} K - 10 \log_{10} (1 + \theta^2 \omega^2) = G_K + G_1$$

$$\varphi = -\text{Arctg} \omega \theta$$

- La description de la réponse harmonique du système se fait aisément en étudiant son comportement asymptotique en régime permanent sinusoïdal
- On complète cette étude par quelques valeurs permettant d'obtenir la réponse par interpolation

# Etude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du premier ordre

**Asymptotes :**  $G = 20 \log_{10} \|Tbo(j\omega)\| = 20 \log_{10} \frac{K}{\sqrt{1 + \theta^2 \omega^2}} = 20 \log_{10} K - 10 \log_{10} (1 + \theta^2 \omega^2) = G_K + G_1$

Il existe deux asymptotes :  $A_{10}$  pour les valeurs faibles de  $\omega$

$A_{11}$  pour les valeurs fortes de  $\omega$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow 1 + \omega^2 \theta^2 \approx 1 \Rightarrow G_1 \approx 0 \text{ dB} \Rightarrow A_{10} = 0 \text{ dB}$$

$$\omega^2 \theta^2 \gg 1 \Leftrightarrow \omega > 1/\theta \Rightarrow G_1 \approx -10 \text{ Log}_{10} (\omega^2 \theta^2) = -20 \text{ Log}_{10} \omega \theta \Rightarrow A_{11} = -20 \text{ Log}_{10} \omega - 20 \text{ Log}_{10} \theta$$

pour  $\omega = 1/\theta$  ;  $A_{11} = 0 \text{ dB}$ ,

pour  $\omega = 10/\theta$  ;  $A_{11} = -20 \text{ Log}(10) = -20 \text{ dB}$ ,

pour  $\omega = 100/\theta$  ;  $A_{11} = -20 \text{ Log}(100) = -40 \text{ dB}$ ,

$A_{11}$  est donc une droite de pente  $-20 \text{ dB}$  par décade et passant par  $(1/\theta, 0)$ .

# Etude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du premier ordre

**Valeurs particulières :**  $G = 20 \log_{10} \|Tbo(j\omega)\| = 20 \log_{10} \frac{K}{\sqrt{1 + \theta^2 \omega^2}} = 20 \log_{10} K - 10 \log_{10} (1 + \theta^2 \omega^2) = G_K + G_1$

$$\omega \rightarrow 0 \Leftrightarrow G_1 \rightarrow 0$$

$$\omega^2 \theta^2 = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\theta} \Leftrightarrow G_1 = -20 \log_{10} 2 = -3dB$$

Il y'a atténuation du gain de -3dB

Après avoir tracé  $G_1$  dans le plan de Bode, il suffit de changer 0dB par  $G_K$

**Déphasage :**  $\varphi = -\text{Arctg}\omega\theta$

$$\omega \rightarrow 0 \Leftrightarrow \varphi \rightarrow 0$$

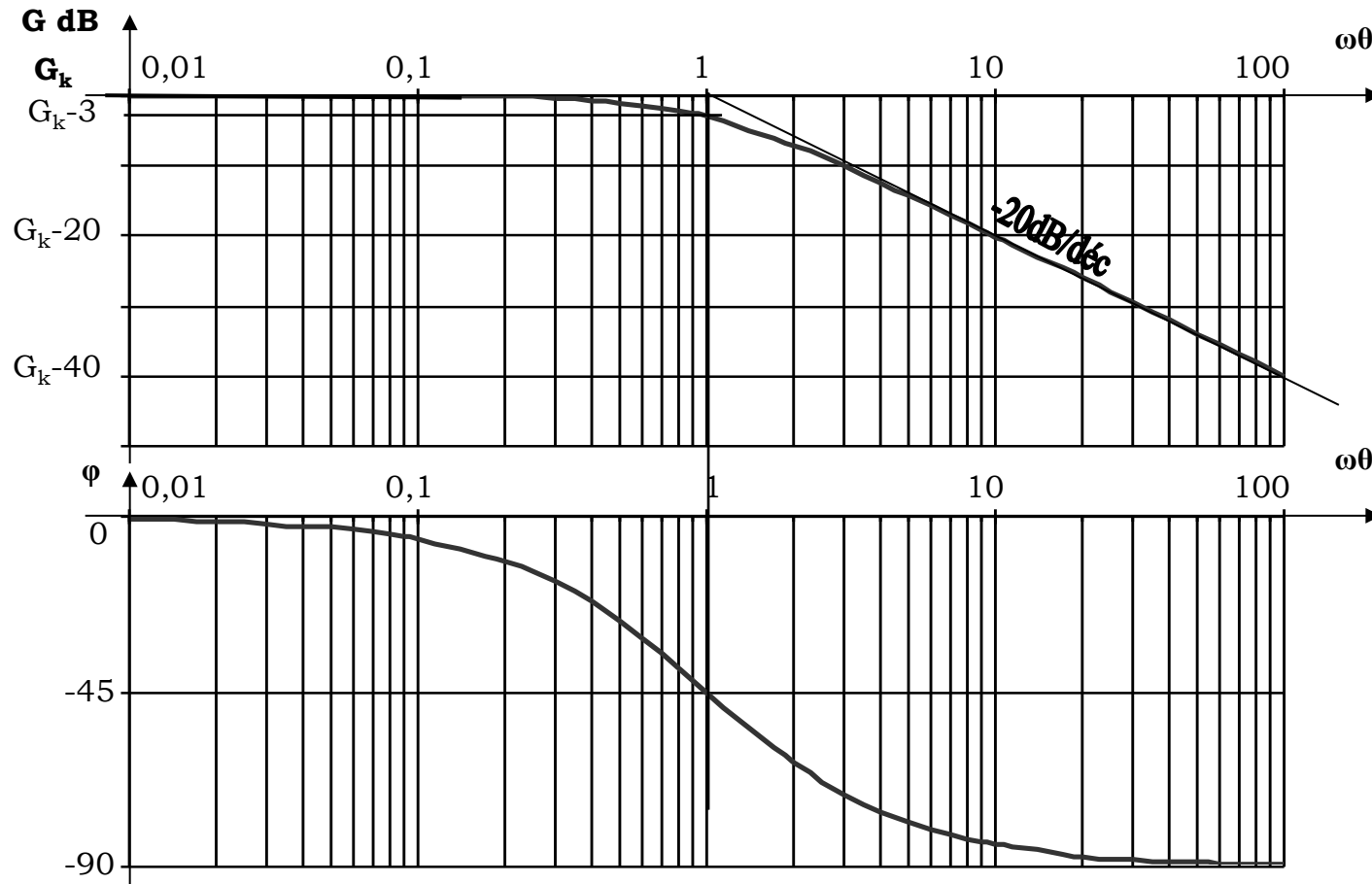
$$\omega^2 \theta^2 = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\theta} \Leftrightarrow \varphi = -45^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \Leftrightarrow \varphi \rightarrow -90^\circ$$

# Etude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du premier ordre

Tracé dans le plan de Bode :





# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du premier ordre

**Récapitulation :** 
$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\theta}$$

$\omega$	$H(j\omega)$ équivalent	gain $\ H(j\omega)\ $	$G$ gain en dB	Phase°
$\omega \ll \frac{1}{\theta} \Leftrightarrow \omega\theta \ll 1$	$K$	$K$	$G_K$	0
$\frac{1}{\theta}$	$\frac{K}{1+j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}$	$G_K - 3dB$	-45
$\omega \gg \frac{1}{\theta} \Leftrightarrow \omega\theta \gg 1$	$\frac{K}{j\omega\theta}$	$\frac{K}{\omega\theta}$	$G_K - 20\log_{10} \theta - 20\log_{10} \omega$	-90

- Le gain diminue de 20dB chaque fois que la pulsation est multipliée par 10
- Pour un système du 1<sup>er</sup> ordre, elle correspond à une atténuation du gain de 3dB par rapport au gain aux faibles pulsation et à un déphasage de -45 deg
- La bande passante d'un système est donnée par la fréquence  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du premier ordre

**Exercice :** 
$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\theta}$$

Tracer le diagramme de Bode d'un système ayant la fonction de transfert suivante en désignant :

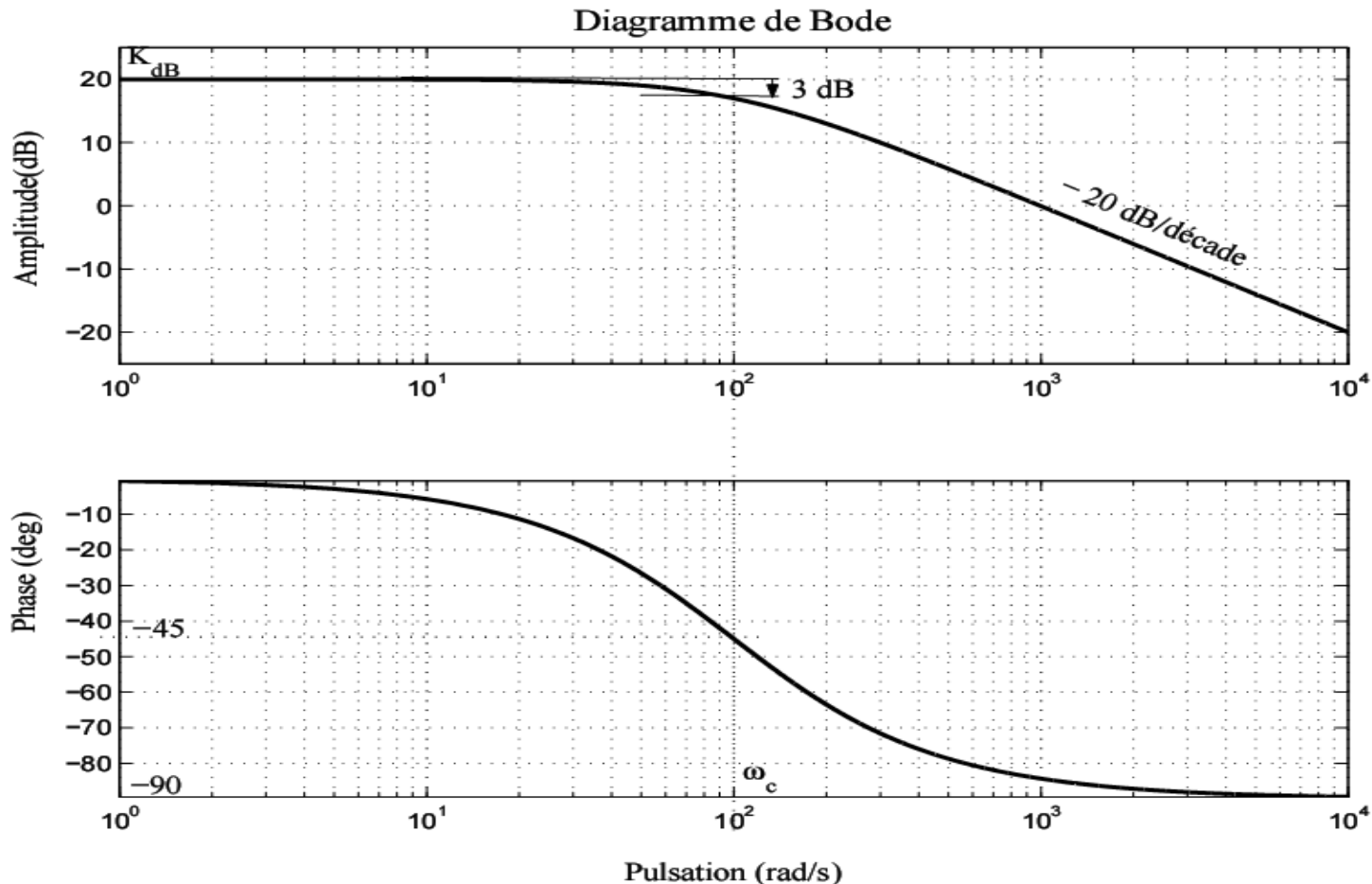
Son gain statique, sa constante de temps, sa pulsation de coupure et sa bande passante

$$H(p) = \frac{10}{1 + 0.01p}$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du premier ordre

**Solution :**  $H(p) = \frac{10}{1+0.01p}$ ,  $K = 10$ ,  $\theta = 0.01$ ,  $\omega_c = 100$ ,  $f_c = 16.18$



# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du premier ordre

### Identification

Si après mesure on obtient des courbes de gain et de phase semblables à celles tracées précédemment, on remarque que :

- ✓ Le gain présente une asymptote horizontale et la courbe des phases tend vers 0 pour des valeurs faibles de  $\omega$ , la fonction de transfert ne présente donc pas de zéros.
- ✓ La deuxième asymptote oblique à une **pente de -20dB/décade**, le système est donc du **1<sup>er</sup> ordre** ce qui est confirmé par **la courbe des phases qui tend vers -90°**
- ✓ La fonction de transfert est donc de la forme  $\frac{K}{1+\theta p}$
- ✓ Il est facile de déterminer K car l'asymptote horizontale passe par

$$G_K = 20 \log_{10} K \Leftrightarrow K = 10^{G_K/20}$$

- ✓ Il est aussi simple de déterminer  $\theta$  car le point d'intersection des asymptotes qui correspond à  $G = 20 \log_{10} K - 3dB$  et à  $\varphi = -45^\circ$  est :

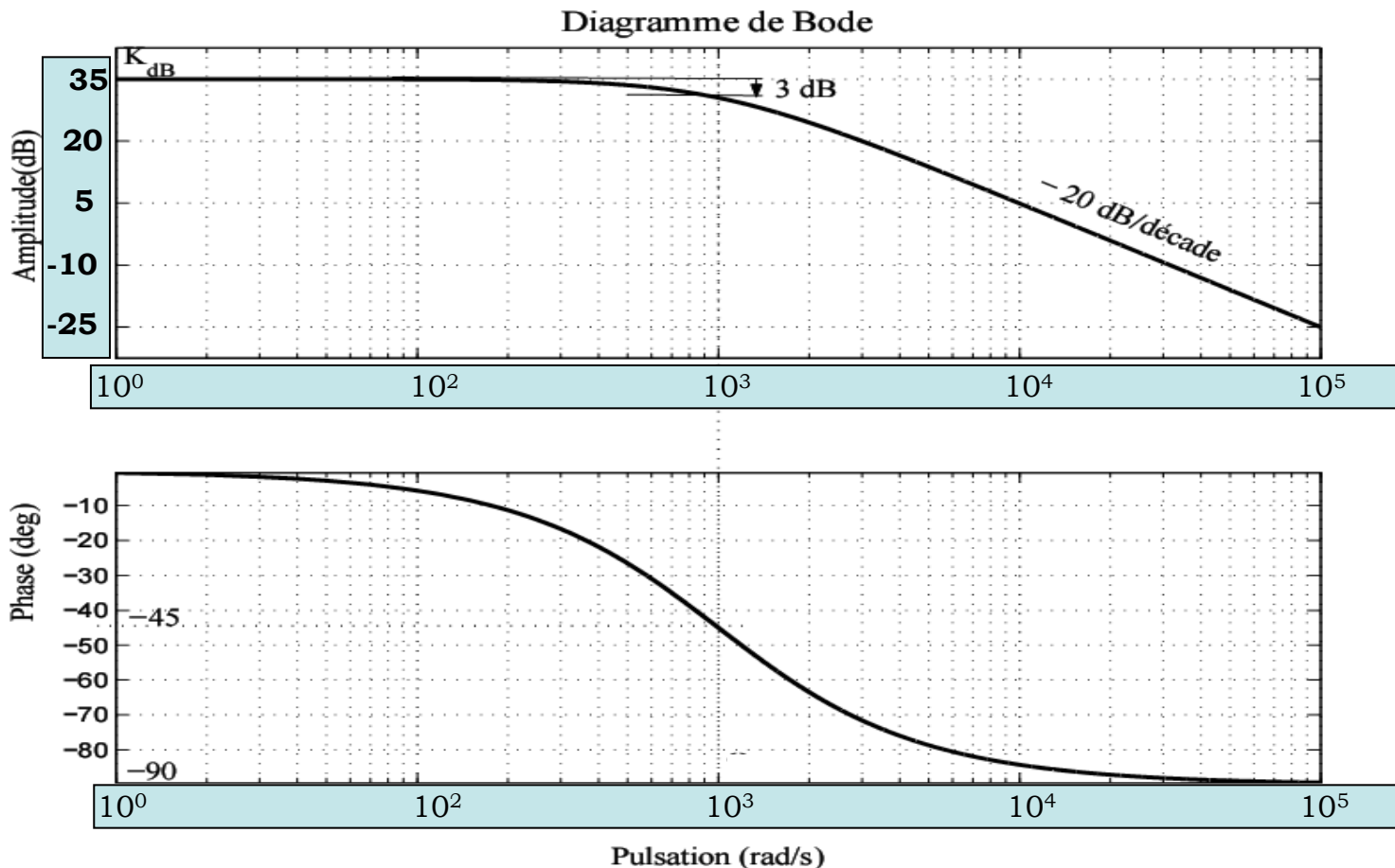
$$\omega = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \omega\theta = 1$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du premier ordre

### Exemple

Déterminer les paramètres du système ayant le plan de Bode suivant :



# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 1<sup>ère</sup> ordre avec retard

$$Tbo(p) = \frac{Ke^{-\tau p}}{1 + \theta p}$$

$\tau \ll \theta$  est le retard pur.  $\theta$  constante du temps et  $K$  le gain statique

$$Tbo(j\omega) = \frac{Ke^{-j\omega\tau}}{1 + \theta j\omega}$$

Sachant que :  $e^{-j\omega\tau} = \cos \tau\omega - j \sin \tau\omega$

$$G = 20 \log_{10} \|Tbo(j\omega)\| = 20 \log_{10} K - 10 \log_{10} (1 + \theta^2 \omega^2)$$

$$\varphi_{rd} = -\text{Artg } \omega\theta + \text{Arctg } \frac{-\sin \omega\tau}{\cos \omega\tau} = -\text{Artg } \omega\theta - \omega\tau \Leftrightarrow \varphi^\circ = -\text{Artg } \omega\theta - \frac{180}{\pi} \cdot \omega\tau$$

$$\varphi_{rd} \sim \omega$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 1<sup>ère</sup> ordre avec retard

### Calcul du gain :

Voir le système du premier ordre

### Calcul du déphasage :

Système du premier ordre en ajoutant  $-\frac{180}{\pi} \cdot \omega\tau$  au déphasage

$$\varphi_{\text{rd}} = -\text{Artg } \omega\theta + \text{Arctg } \frac{-\sin \omega\tau}{\cos \omega\tau} = -\text{Artg } \omega\theta - \omega\tau \Leftrightarrow \varphi^\circ = -\text{Artg } \omega\theta - \frac{180}{\pi} \cdot \omega\tau$$

$$\omega \rightarrow 0 \Leftrightarrow \varphi \rightarrow 0$$

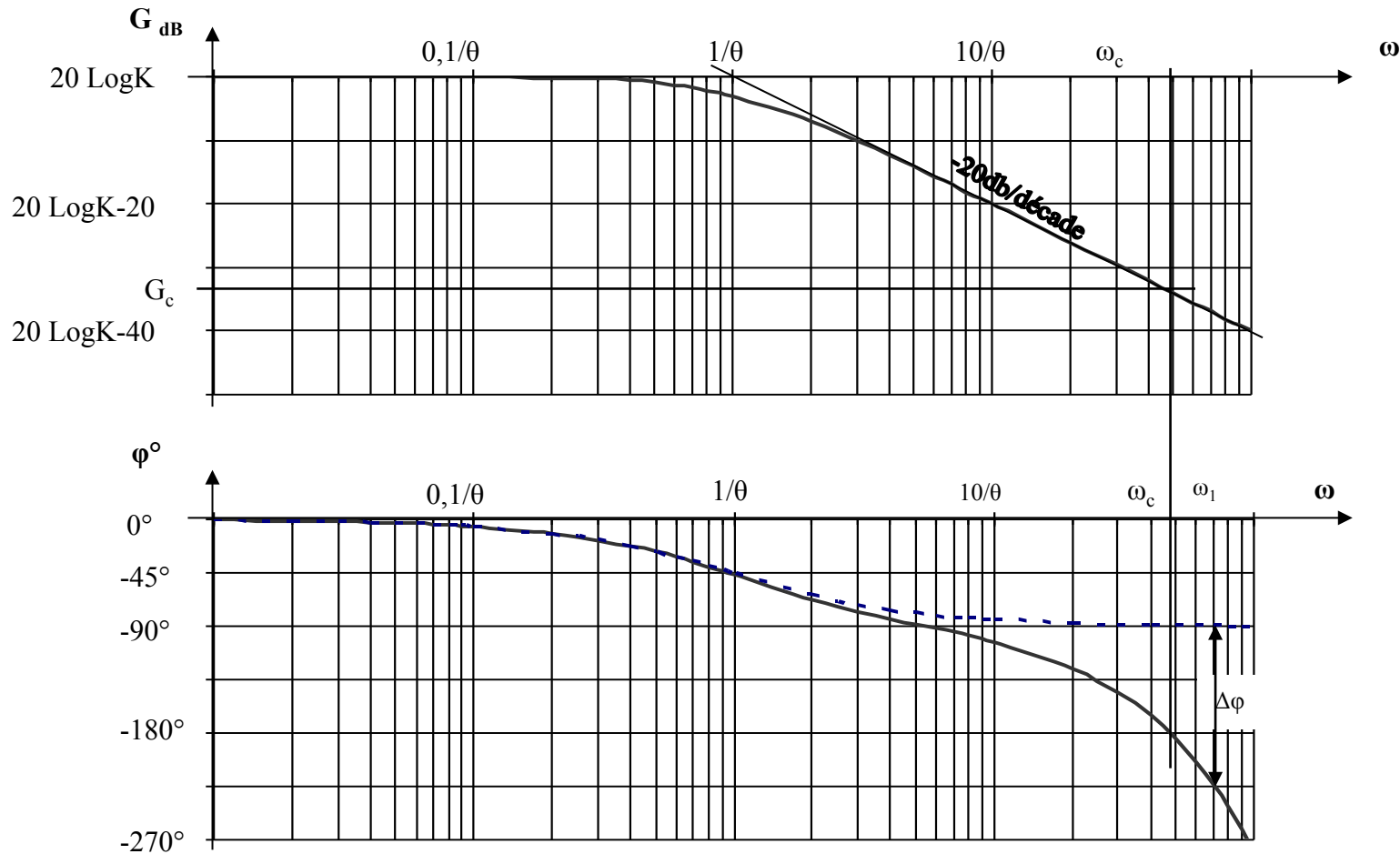
$$\omega^2\theta^2 = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\theta} \Leftrightarrow \varphi = -45^\circ - \frac{180}{\pi} \frac{\tau}{\theta} \approx -45^\circ (\tau \ll \theta)$$

$$\omega \rightarrow \infty \Leftrightarrow \varphi \rightarrow -\infty$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 1<sup>ère</sup> ordre avec retard

Tracé dans le plan de bode :





# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 1<sup>ère</sup> ordre avec retard

### Identification :

Si après mesure des courbes de gains et de phase on obtient un graphe semblable à celui d'avant. On remarque alors que:

✓Le gain présente une asymptote horizontale et la courbe phase tend vers 0 pour les faibles valeurs de  $\omega$ . La fonction de transfert ne présente donc pas de zéro (pas de termes en  $p$  au numérateur).

✓L'asymptote 2 oblique a une pente de -20dB/décade.

✓La fonction de transfert semble être de la forme 
$$\frac{K}{1 + p\theta}$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 1<sup>ère</sup> ordre avec retard

### Identification :

✓ Par contre la phase  $\phi \rightarrow -\infty$  lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ . C'est l'indication de la **présence d'un retard pur**.

✓ Il est facile de déterminer K car l'asymptote horizontale passe par  $G_k = 20 \text{ Log}_{10} K \Leftrightarrow K = 10^{G_k/20}$

✓ On détermine  $\theta$  car le point de concours des asymptotes,  $G = 20 \text{ Log} K - 3\text{dB}$  et  $\omega = 1/\theta$  ( $\omega \theta = 1$ ).

✓ Il reste à déterminer  $\tau$ , pour cela :

on trace sur le même graphe la phase d'un 1<sup>er</sup> ordre sans retard (représentée en pointillés).

$\Delta \phi$  représente  $180 \omega \tau / \pi$ , connaissant  $\omega$  il est facile de calculer  $\tau$ .

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre factorisable

$$Tbo(p) = \frac{K}{(1 + \theta_1 p)(1 + \theta_2 p)}$$

$\theta_1, \theta_2$  sont les constantes du temps et  $K$  le gain statique

$$Tbo(j\omega) = \frac{K}{(1 + \theta_1 j\omega)(1 + \theta_2 j\omega)} = \frac{K}{1 + (\theta_1 + \theta_2)j\omega - \theta_1\theta_2\omega^2} \quad (\theta_1 \leq \theta_2)$$

$$G = 20 \log_{10} K - 10 \log_{10} (1 + \omega^2 \theta_1^2) - 10 \log_{10} (1 + \omega^2 \theta_2^2) = G_K + G_1 + G_2$$

$$\varphi = - \text{Arctg} \frac{(\theta_1 + \theta_2)\omega}{1 - \theta_1\theta_2\omega^2}$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre factorisable

$$G = 20\log_{10} K - 10\log_{10}(1 + \omega^2\theta_1^2) - 10\log_{10}(1 + \omega^2\theta_2^2) = G_K + G_1 + G_2$$

### Asymptotes :

Il y a 2 asymptotes  $A_{10}$ ,  $A_{11}$  pour  $G_1$  et deux asymptotes  $A_{20}$ ,  $A_{21}$  pour  $G_2$

$$\omega < \frac{1}{\theta_2} \Rightarrow \omega < \frac{1}{\theta_1} \Rightarrow A_{10} = A_{20} = 0$$

$\omega > \frac{1}{\theta_1} \Rightarrow \omega > \frac{1}{\theta_2} \Rightarrow A_{11}$  &  $A_{21}$  sont deux droites de pentes  $-20\text{dB/décades}$  passant respectivement par les points  $(1/\theta_1, 0)$ ,  $(1/\theta_2, 0)$

$\omega > \frac{1}{\theta_1}$  l'asymptote finale

$$A_f = A_{11} + A_{21} = -20\log_{10} \omega\theta_1 - 20\log_{10} \omega\theta_2 = -20\log_{10} \omega^2\theta_1\theta_2 = -40\log_{10} \omega\sqrt{\theta_1\theta_2}$$

est une droite de pente  $-40\text{dB/décade}$  et passant par  $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\theta_1\theta_2}}$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre factorisable

$$G = 20 \log_{10} K - 10 \log_{10} (1 + \omega^2 \theta_1^2) - 10 \log_{10} (1 + \omega^2 \theta_2^2) = G_K + G_1 + G_2$$

### Valeurs particulières

$$\omega^2 \theta_1^2 = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\theta_1} \Rightarrow G_1 = -3dB$$

$$\omega^2 \theta_2^2 = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\theta_2} \Rightarrow G_2 = -3dB$$

$G = G_K + G_1 + G_2$  passe en

$\omega = 1/\theta_2$  Par un point d'ordonnées  $G_{21}$  tel que  $G_K - 6dB < G_{21} < G_K - 3dB$  et en

$\omega = 1/\theta_1$  Par un point d'ordonnées situé entre 3 et 6 dB en dessous du point

d'intersection des asymptotes  $A_{21}$  et  $A_f$

$$G_K + A_f(1/\theta_1) - 6dB \leq G(1/\theta_1) \leq G_K + A_f(1/\theta_1) - 3dB$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre factorisable

$$\varphi = -\text{Arctg } \omega\theta_1 - \text{Arctg } \omega\theta_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = \text{Arctg } \frac{(\theta_1 + \theta_2)\omega}{1 - \theta_1\theta_2\omega^2}$$

### Calcul du déphasage

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$$

$$\omega = 1/\theta_1 \Rightarrow \varphi_1 = -45^\circ$$

$$\omega = 1/\theta_2 \Rightarrow \varphi_2 = -45^\circ$$

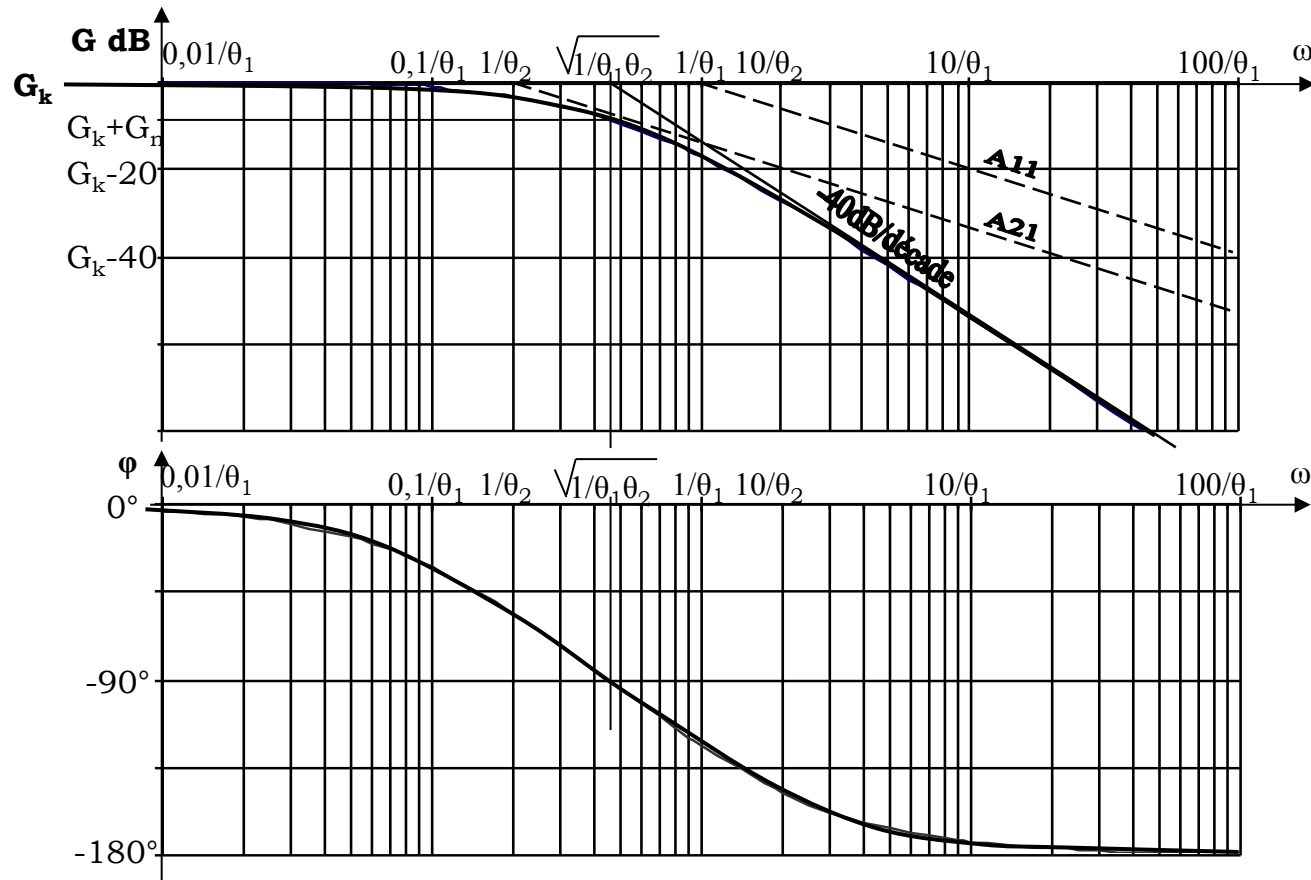
$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi = -180^\circ$$

$$\omega = 1/\sqrt{\theta_1\theta_2} \Rightarrow \varphi = -90^\circ$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre factorisable

### Tracé dans le plan de Bode



# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre factorisable

### Identification

Si après mesure on obtient des courbes de gain et de phase semblables à celles tracées précédemment, on remarque que :

- ✓ Le gain présente une asymptote horizontale et la courbe des phases tend vers 0 pour des valeurs faibles de  $\omega$ , la fonction de transfert ne présente donc pas de zéros.
- ✓ L'asymptote oblique à une **pente de -40dB/décade**, le système est donc du **2<sup>er</sup> ordre** ce qui est confirmé par **la courbe des phases qui tend vers -180°**. Cette asymptote oblique coupe l'asymptote horizontale en  $\omega_n = 1/\sqrt{\theta_1\theta_2}$
- ✓ La fonction de transfert est donc de la forme  $\frac{K}{(1+\theta_1p)(1+\theta_2p)}$  si et seulement si  $G(\omega_n) \leq G_K - 6dB$  sinon le dénominateur n'est pas factorisable ( $\theta_1 + \theta_2 \geq 2/\omega_n$ )
- ✓ Il est facile de déterminer K car l'asymptote horizontale passe par

$$G_K = 20 \log_{10} K \Leftrightarrow K = 10^{G_K/20}$$

- ✓ Il reste à déterminer  $\theta_1, \theta_2$ . Pour cela on recherche  $\omega_n = 1/\sqrt{\theta_1\theta_2}$  point d'intersection de l'asymptote avec  $G_K$ . Le gain a pour valeur  $G_K + G_n$



# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre factorisable

### Identification

✓ On remplaçant  $\omega$  par  $\omega_n$  on obtient :

$$G_n = -10 \operatorname{Log} \left( 1 + \frac{\theta_1^2}{\theta_1 \theta_2} \right) - 10 \operatorname{Log} \left( 1 + \frac{\theta_2^2}{\theta_1 \theta_2} \right) = -10 \operatorname{Log} \left( \frac{(\theta_1 + \theta_2)^2}{\theta_1 \theta_2} \right) = -20 \operatorname{Log} [(\theta_1 + \theta_2) \cdot \omega_n]$$
$$\Leftrightarrow \theta_1 + \theta_2 = \frac{10^{-G_n/20}}{\omega_n} = S \quad \text{or} \quad \theta_1 \cdot \theta_2 = \frac{1}{\omega_n^2} = P$$

donc  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont solutions de l'équation  $\theta^2 - S\theta + P = 0$  soit

$$\theta_1 = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre non factorisable

$$Tbo(p) = \frac{K}{1 + 2\theta p + \theta^2 p^2}; \xi < 1 \Rightarrow Tbo(p) = \frac{K}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}$$

$\xi$  est le **coefficient d'amortissement**,  $\theta$  la constante du temps ( $\omega_n$  pulsation naturelle) et  $K$  le gain statique

$$Tbo(j\omega) = \frac{K}{1 - \theta^2 \omega^2 + 2\theta j\omega}$$

$$G = 20 \log_{10} K - 10 \log_{10} \left( (1 - \omega^2 \theta^2)^2 + 4\xi^2 \theta^2 \omega^2 \right) = G_K + G_1$$

$$\varphi = - \operatorname{Arctg} \frac{2\xi\omega\theta}{1 - \omega^2\theta^2}$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre non factorisable

**Asymptotes :**  $G = 20 \log_{10} K - 10 \log_{10} \left( (1 - \omega^2 \theta^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 \theta^2 \right) = G_K + G_1$

$$\omega \rightarrow 0, (1 - \omega^2 \theta^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 \theta^2 \approx 1 \Rightarrow A_{10} = 0 \text{ dB}$$

$$\omega^2 \theta^2 \gg 1 \Rightarrow \omega > \frac{1}{\theta}, \Rightarrow \omega^4 \theta^4 \gg 4\xi^2 \omega^2 \theta^2 \Rightarrow A_{11} = -40 \log_{10} \omega \theta \text{ dB}$$

$$\xi^2 \omega^2 \theta^2 \gg 1 \Rightarrow \omega^2 \theta^2 \gg 1 \quad \text{car} \quad \xi < 1$$

L'asymptote  $A_{11}$  est une droite de pente  $-40\text{dB/décade}$  passant par le point  $\left( \frac{1}{\theta}, 0 \right)$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre non factorisable

**Valeurs particulières** :  $G = 20 \log_{10} K - 10 \log_{10} \left( (1 - \omega^2 \theta^2)^2 + 4\xi^2 \theta^2 \omega^2 \right) = G_K + G_1$

$$\omega = \omega_n = \frac{1}{\theta}, G_1 = G_{1n} = -10 \log_{10} 4\xi^2 = -20 \log_{10} 2\xi = -20 \log_{10} \xi - 6 \text{dB}$$

Selon la valeur de  $\xi$ ,  $G_n$  peut être positif ou négatif.

Avec l'existence d'une asymptote horizontale pour les faibles valeurs de  $\omega$  on s'aperçoit que le gain passe par un maximum appelé **résonance**

$$\frac{dG_1}{d\omega} = 0 \Rightarrow -10 \cdot \frac{1}{\ln 10} \frac{4\theta^4 \omega^3 + 4\theta^2 \omega (2\xi^2 - 1)}{(1 - \omega^2 \theta^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 \theta^2} = 0 \Rightarrow \omega \theta = \omega_r \theta = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre non factorisable

**Valeurs particulières** :  $G = 20 \log_{10} K - 10 \log_{10} \left( (1 - \omega^2 \theta^2)^2 + 4\xi^2 \theta^2 \omega^2 \right) = G_K + G_1$

$$\frac{dG_1}{d\omega} = 0 \Rightarrow -10 \cdot \frac{1}{\ln 10} \frac{4\theta^4 \omega^3 + 4\theta^2 \omega (2\xi^2 - 1)}{(1 - \omega^2 \theta^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 \theta^2} = 0 \Rightarrow \omega \theta = \omega_r \theta = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Pour cette valeur

$$G_1 = G_r = -20 \log_{10} 2\xi - 10 \log_{10} (1 - \xi^2)$$

La résonance n'existe que si

$$1 - 2\xi^2 \geq 0 \Leftrightarrow \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pour  $\omega = \omega_n \sqrt{2(1 - 2\xi^2)}$ ,  $G_1 = 0$  ssi  $1 - 2\xi^2 > 0 \Rightarrow \xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Après avoir tracé  $G_1$ , faire un changement d'axe en remplaçant 0 par  $G_K$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre non factorisable

**Déphasage :**  $\varphi = -\text{Arctg} \frac{2\xi\omega\theta}{1 - \omega^2\theta^2}$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0^\circ$$

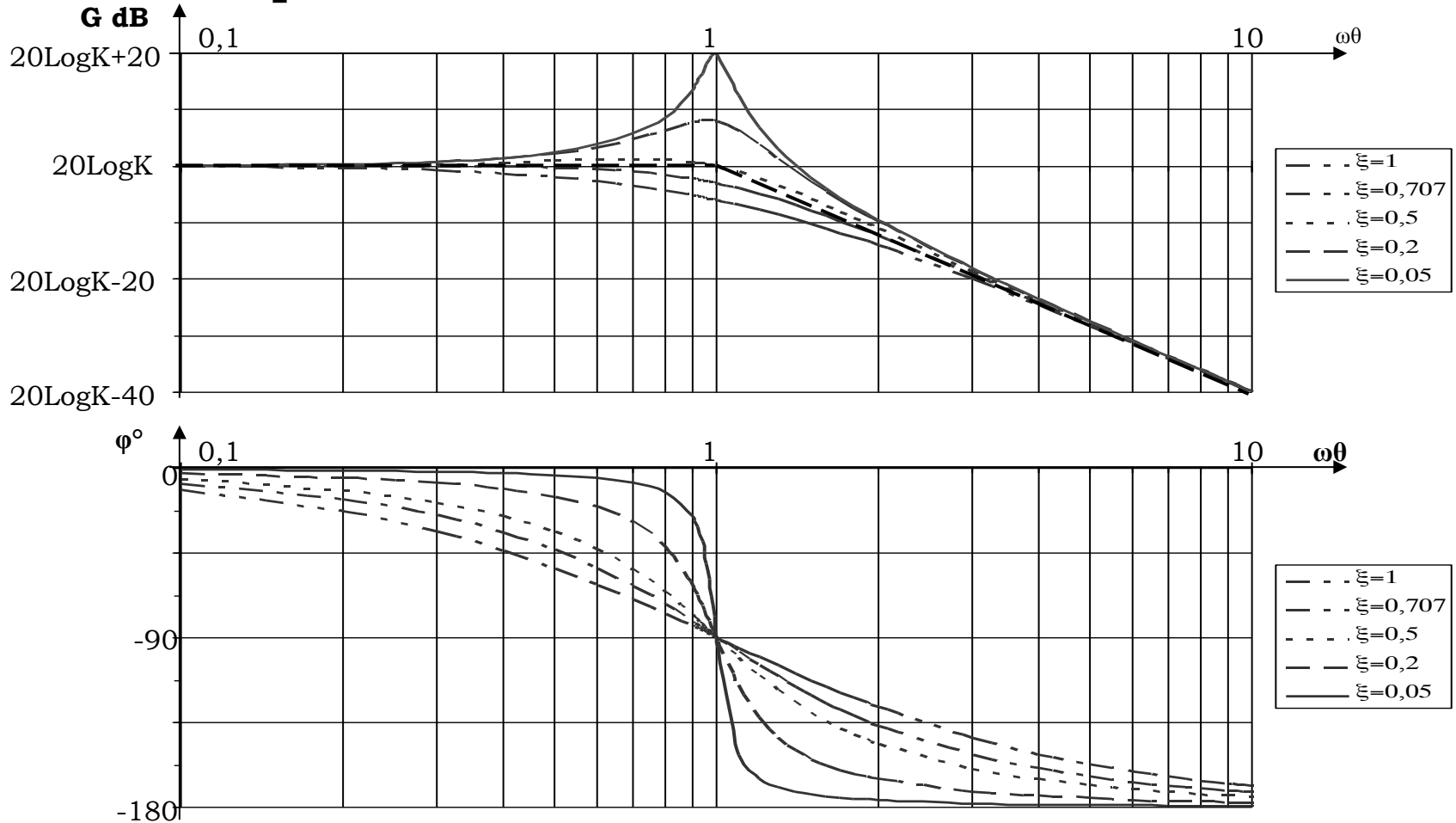
$$\omega = \omega_n \Rightarrow \varphi = -90^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi \rightarrow -180^\circ$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre non factorisable

Tracé dans le plan de Bode :



# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre non factorisable

### Identification

Si après mesure on obtient des courbes de gain et de phase semblables à celles tracées précédemment, on remarque que :

- ✓ Le gain présente une asymptote horizontale et la courbe des phases tend vers 0 pour des valeurs faibles de  $\omega$ , la fonction de transfert ne présente donc pas de zéros.
- ✓ L'asymptote oblique à une **pente de -40dB/décade**, le système est donc du **2<sup>er</sup> ordre** ce qui est confirmé par **la courbe des phases qui tend vers -180°**. Le gain en  $\omega_n = 1/\theta$  est supérieur à  $G_K - 6dB$

- ✓ La fonction de transfert est donc de la forme  $\frac{K}{1 + 2\zeta\theta p + \theta^2 p^2}$ ,  $\xi < 1$

- ✓ Il est facile de déterminer K car l'asymptote horizontale passe par

$$G_K = 20 \log_{10} K \Leftrightarrow K = 10^{G_K/20}$$

- ✓ Il reste à déterminer  $\xi$ . Pour cela on utilise la formule  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{m}}$  avec  $m = 10^{G_r/20}$

$$G_r = G_m - 20 \log_{10} K \quad G_m \text{ est la gain à la résonance si elle existe.}$$



# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre non factorisable

### Récapitulation

$G_r$	20	14	10,5	8,1	6,3	4,8	3,6	2,7	1,9	1,2	0,7	0,3	0,1	0
$m$	10,00	5,01	3,35	2,54	2,07	1,74	1,51	1,36	1,24	1,15	1,08	1,04	1,01	1,00
$\xi$	<b>0,050</b>	<b>0,100</b>	<b>0,151</b>	<b>0,201</b>	<b>0,250</b>	<b>0,30</b>	<b>0,35</b>	<b>0,400</b>	<b>0,450</b>	<b>0,50</b>	<b>0,55</b>	<b>0,609</b>	<b>0,65</b>	<b>0,707</b>
$\omega_r/\omega_n$	0,997	0,990	0,977	0,959	0,935	0,90	0,86	0,825	0,772	0,70	0,62	0,509	0,38	0,017
$\omega/\omega_n$ pour $G=G_k$	1,411	1,400	1,382	1,356	1,323	1,27	1,22	1,166	1,091	0,99	0,87	0,719	0,55	0,000

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème ordre avec intégrateur

Un système est doté d'un intégrateur, s'il a un pôle nul ( $p$  est en facteur au dénominateur)

$$Tbo(p) = \frac{K}{p(1 + \theta p)}$$

$\theta$  constante du temps et  $K$  le gain statique

$$Tbo(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + \theta j\omega)}$$

$$G = 20\log_{10} K - 20\log_{10}(\omega) - 10\log_{10}(1 + \omega^2\theta^2) = G_K + G_1 + G_2$$

$$\phi = -\text{Artg } \omega \theta + 90^\circ$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème avec intégrateur

$$G = 20\log_{10} K - 20\log_{10}(\omega) - 10\log_{10}(1 + \omega^2\theta^2) = G_K + G_1 + G_2$$

### Asymptotes :

Il y a une asymptote  $A_{10}$  pour  $G_1$  et deux asymptotes  $A_{20}$ ,  $A_{21}$  pour  $G_2$

$\forall \omega, A_{10} = G_1 = -20\log \omega$  C' est une droite de pente -20dB/décade

$$\omega < \frac{1}{\theta} \Rightarrow A_{20} = 0dB$$

$\omega > \frac{1}{\theta} \Rightarrow A_{21} = -20\log \omega\theta$  C' est une droite de pente -20dB/décade passant par le point  $(1/\theta, 0)$

l'asymptote finale pour  $\omega > \frac{1}{\theta}$

$$A_f = A_{10} + A_{21} = -20\log_{10} \omega - 20\log_{10} \omega\theta = -40\log_{10} \omega - 20\log_{10} \theta$$

est une droite de pente -40dB/décade coupant  $G_1$  à  $\omega = \frac{1}{\theta}$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème avec intégrateur

$$G = 20\log_{10} K - 20\log_{10}(\omega) - 10\log_{10}(1 + \omega^2\theta^2) = G_K + G_1 + G_2$$

**Asymptotes :**

Pour  $\omega = \frac{1}{\theta}$

$$A_{10} = 20\log\theta \quad A_{21} = 0$$

Le point de concours des asymptotes  $A_f(\omega < 1/\theta)$  et  $A_f(\omega > 1/\theta)$  est  $(1/\theta, 20\log\theta)$

Une fois ces asymptotes tracée il faut rajouter  $G_K$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème avec intégrateur

$$G = 20\log_{10} K - 20\log_{10}(\omega) - 10\log_{10}(1 + \omega^2\theta^2) = G_K + G_1 + G_2$$

**Valeurs particulières :**

$$\omega^2\theta^2 = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\theta} \Rightarrow G_1 = 20\log\theta, \quad G_2 = -3dB \Rightarrow G = G_K + 20\log\theta - 3dB$$

$$\omega = 1 \Rightarrow G = G_K - 10\log(1 + \theta^2)$$

**Calcul du déphasage :**  $\phi = -\text{Artg } \omega \theta + 90^\circ$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \phi \rightarrow +90^\circ$$

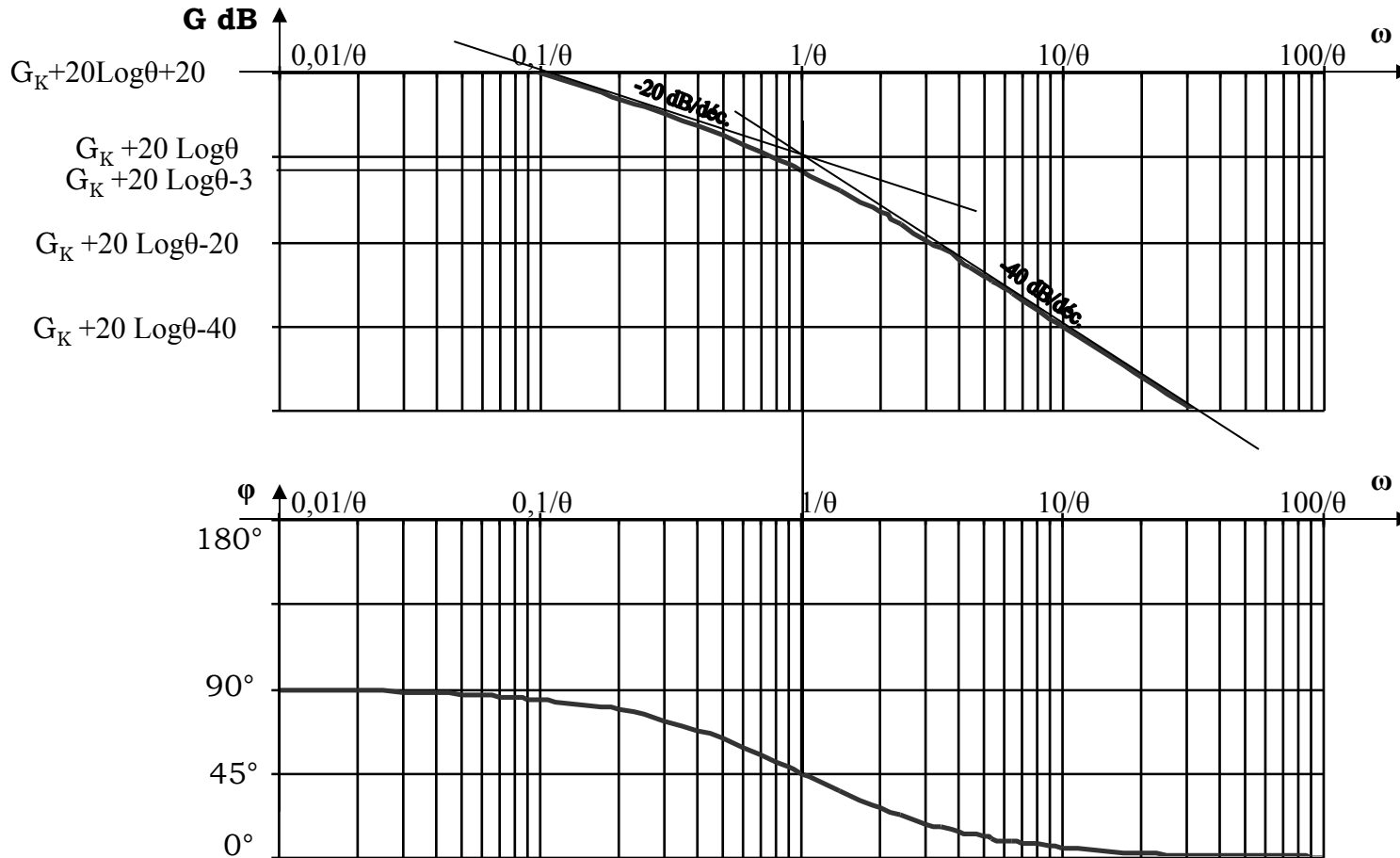
$$\omega = 1/\theta \Rightarrow \phi = +90 - \text{Arctg } 1 = 45^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \phi \rightarrow +90^\circ - 90^\circ \Rightarrow \phi \rightarrow 0^\circ$$

# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème avec intégrateur

Tracé dans le plan de Bode :



# Étude dans le plan de Bode

## Étude d'un système du 2ème avec intégrateur

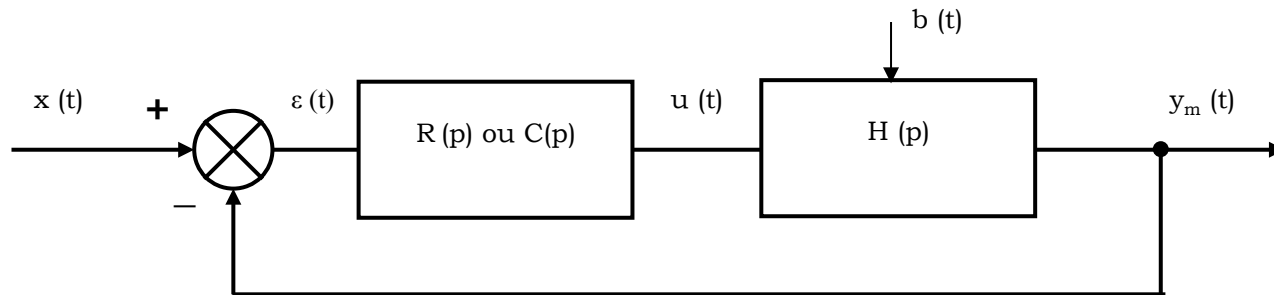
### Identification

Si après mesure on obtient des courbes de gain et de phase semblables à celles tracées précédemment, on remarque que :

- ✓ Le gain ne présente pas d'asymptote horizontale mais une asymptote oblique de pente  $-20\text{dB/décade}$ , et la courbe des **phases tend vers  $90^\circ$**  pour des valeurs faibles de  $\omega$ , la fonction de transfert présente donc **un intégrateur**.
- ✓ L'asymptote oblique à une **pente de  $-40\text{dB/décade}$** , le système est donc du **2<sup>er</sup> ordre**
- ✓ La fonction de transfert est donc de la forme 
$$\frac{K}{p(1 + \theta p)}$$
- ✓ Pour déterminer  $K$  et  $\theta$  il suffit de rechercher le point d'intersection des deux asymptotes. Elle se coupent en  $(1/\theta, 20 \log_{10} K\theta - 3\text{dB})$  et  $\varphi(1/\theta) = 45^\circ$
- ✓ Connaissant  $\theta$  il est facile de déterminer  $K$

# Régulateurs et correcteurs

## Caractéristiques principales du cahier des charges



$$T_{bf}(p) = \frac{Y_m(p)}{X(p)} = \frac{R(p)H(p)}{1 + R(p)H(p)} = \frac{T_{bo}(p)}{1 + T_{bo}(p)} \quad \text{ou} \quad \frac{R(p)C(p)}{1 + R(p)C(p)}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + T_{bo}(p)}$$



# Régulateurs et correcteurs

## Caractéristiques principale du cahier des charges

**Mise en place d'un régulateur ou d'un correcteur permet :**

- d'améliorer la stabilité en boucle fermée,
- d'obtenir en réponse à un signal de consigne  $x(t)$  donné, un temps de réponse inférieur à la limite imposée,
- d'obtenir un dépassement de la variation de la réponse indicielle (réponse à un échelon) satisfaisant (en général inférieur à 5% de la variation de la valeur finale de la grandeur mesurée),
- de diminuer l'influence d'une perturbation  $b(t)$  (exercice),
- d'assurer une certaine robustesse

# Régulateurs et correcteurs

## Principaux régulateurs

Il existe de nombreux types de régulateurs.

### Régulateur proportionnel de Type P

- Il permet de régler le gain en boucle fermée et donc d'améliorer la stabilité du système bouclé.
- Il est très utilisé quand le processus est intégrateur
- Il a la forme suivante

$$R(p) = K_r$$

# Régulateurs et correcteurs

## Principaux régulateurs

### Régulateur proportionnel Intégrale de Type PI

$$R(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

- Il permet de régler le gain en boucle fermée et donc d'assurer la stabilité du système bouclé par sa fonction P.
- Il permet d'annuler l'erreur statique par sa fonction  $I = \frac{1}{T_i p}$  lorsque le processus n'est pas **lui-même intégrateur**
- Ses paramètres  $K_r$  et  $T_i$  peuvent être réglés séparément

# Régulateurs et correcteurs

## Principaux régulateurs

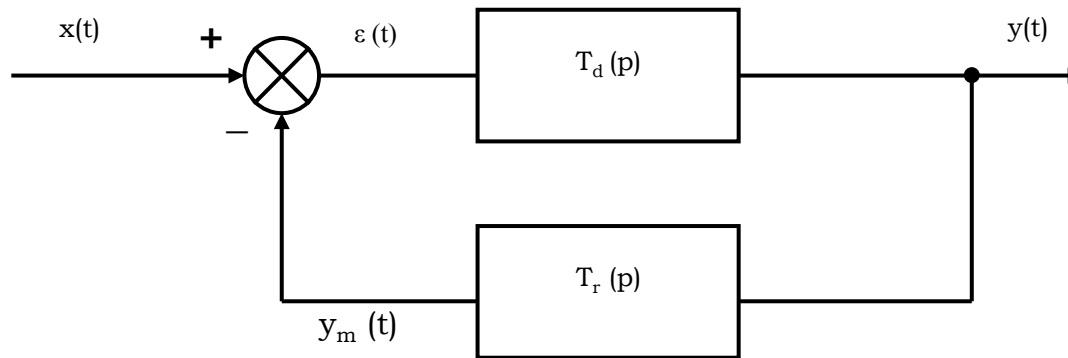
### Régulateur proportionnel Intégrale Dérivé de Type PID

$$R(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p) = K_r \frac{1 + (T_i + T_d)p + T_i T_d p^2}{T_i p}$$

- Il permet de régler le gain en boucle fermée et donc d'assurer la stabilité du système bouclé par sa fonction P.
- Il permet d'annuler l'erreur statique par sa fonction  $I = \frac{1}{T_i p}$
- Il permet d'augmenter la rapidité du système par sa fonction dérivateur  $D = T_d p$  en augmentant le gain aux fréquences élevées tout en améliorant la stabilité en augmentant le déphasage
- Ses paramètres  $K_r$  et  $T_i$  et  $T_d$  peuvent être réglés séparément
- Des remarques????????????????

# Régulateurs et correcteurs

## Étude de la stabilité dans le domaine fréquentiel



Selon les valeurs de la perturbation à  $\omega c$

# Régulateurs et correcteurs

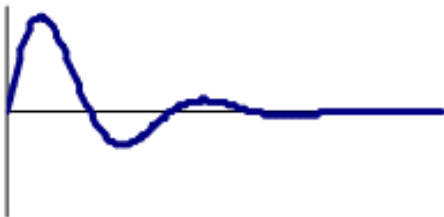
## Étude de la stabilité dans le domaine fréquentiel

Si pour une valeur de pulsation  $\omega_c$  le déphasage  $\phi(\omega_c) = -180^\circ$

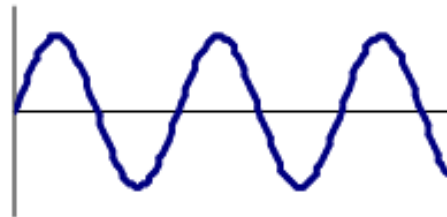
$\|Tbo(j\omega_c)\| < 1$  , le système sera **stable** en boucle fermée,

$\|Tbo(j\omega_c)\| = 1$  le système sera **instable** en boucle fermée, il sera siège d'une oscillation entretenue pure de pulsation  $\omega_c$ ,

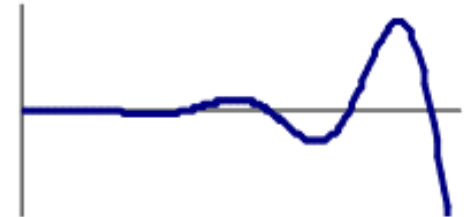
$\|Tbo(j\omega_c)\| > 1$  , le système sera **instable** et **divergent** en boucle fermée.



$$\|Tbo(j\omega_c)\| < 1$$



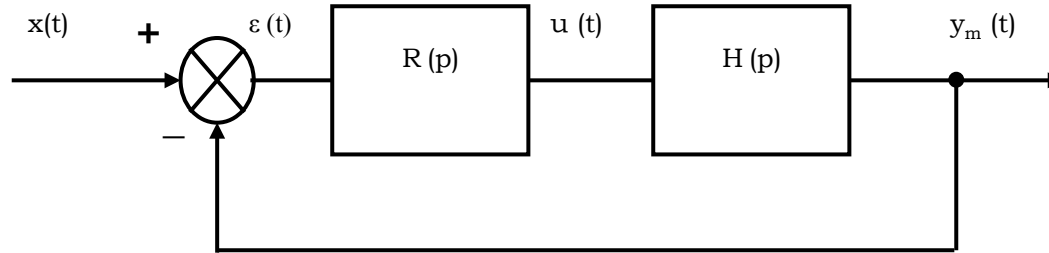
$$\|Tbo(j\omega_c)\| = 1$$



$$\|Tbo(j\omega_c)\| > 1$$

# Régulateurs et correcteurs

## Amélioration de la stabilité



Étudions les notions de marge de phase et de gain sur un exemple

$$R(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_r \frac{(1 + T_i p)}{T_i p}$$

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \theta_1 p)(1 + \theta_2 p)(1 + \theta_3 p)}$$

$$T_i = \theta_1 = 200\text{s}; \theta_2 = 100\text{s}; \theta_3 = 5\text{s}; K = 2;$$

# Régulateurs et correcteurs

## Amélioration de la stabilité

Le gain et la phase de la boucle ouverte se calculent par :

$$T_{bo}(p) = \frac{KK_r}{\theta_1 p (1 + \theta_2 p) (1 + \theta_3 p)} \Rightarrow T_{bo}(j\omega) = \frac{KK_r}{j\omega \theta_1 (1 + j\omega \theta_2) (1 + j\omega \theta_3)} = \frac{KK_r}{-\omega^2 \theta_1 (\theta_2 + \theta_3) + j\omega \theta_1 (1 - \omega^2 \theta_2 \theta_3)}$$

$$G = 20 \text{Log } K_r + 20 \text{Log } K - 20 \text{Log } \omega \theta_1 - 10 \text{Log}(1 + \omega^2 \theta_2^2) - 10 \text{Log}(1 + \omega^2 \theta_3^2) = G_{kr} + G_k + G_1 + G_2 + G_3$$

$$\phi = -90^\circ - \text{Arctg } \omega \theta_2 - \text{Arctg } \omega \theta_3$$

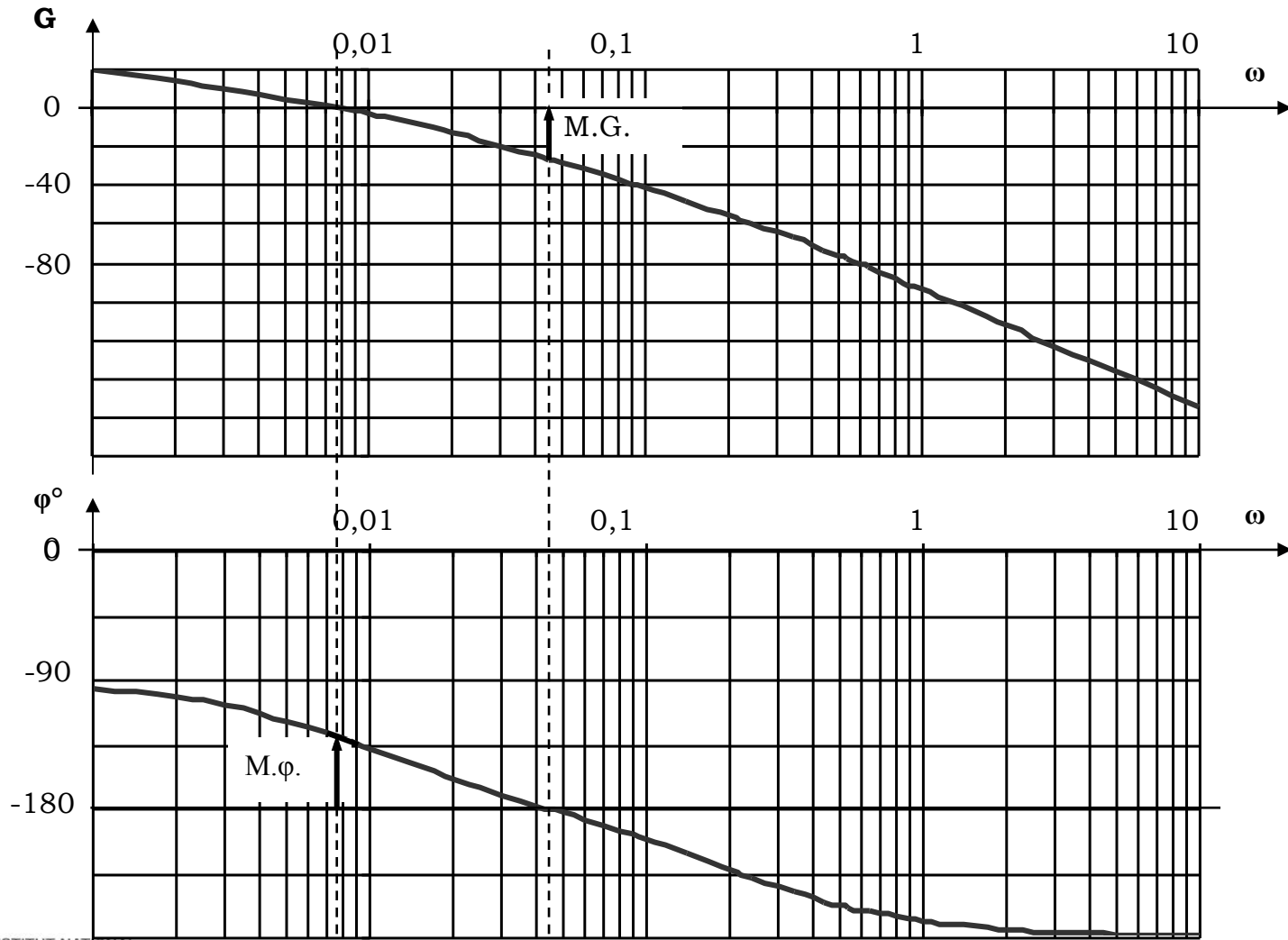
$$\phi = -180^\circ \Rightarrow \omega \theta_1 (1 - \omega^2 \theta_2 \theta_3) = 0 \Rightarrow \omega_c = 1 / \sqrt{\theta_2 \theta_3}$$



# Régulateurs et correcteurs

## Amélioration de la stabilité

Pour  $K_r=1$



# Régulateurs et correcteurs

## Amélioration de la stabilité

D'après la remarque précédente, le système devient instable quand

$$\rho(\omega_c) = -180^\circ \quad \text{et} \quad \|Tbo(j\omega_c)\| = 1$$

et donc quand

$$\rho(\omega_c) = -180^\circ \quad \text{et} \quad G(\omega_c) = 0$$

# Conclusion générale

Etude des systèmes asservis dans le domaine temporel

Caractéristiques d'un système asservis

Systèmes premier ordre et deuxième ordre

Domaine fréquentiel

Plan de Bode

Les marges de stabilité

La régulation

Applications : TP d'automatique et automatisme