Observation et Commande des Systèmes

Représentation d'états
Commandabilité
Observabilité
Dualité

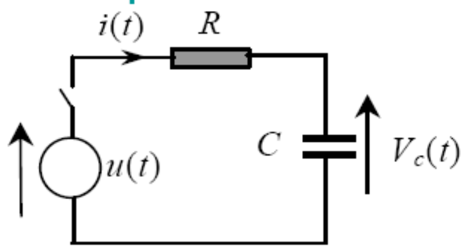
Samia Ainouz-Zemouche

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN

Cas linéaire

Introduction à la représentation d'états

❑ Exemple 1 : circuit RC



Entrée : $u(t)$

Sortie : $y(t) = i(t)$

Posons $x(t)=V_c(t)$

❑ Modélisation du circuit RC

$$Ri(t) + x(t) = u(t)$$
$$x(t) = \frac{1}{C}\int i d\tau$$

$\Rightarrow$

$$RC\,\dot{x}(t) + x(t) = u(t)$$
$$i(t) = -\frac{1}{R}x(t) + \frac{1}{R}u(t)$$

$\Rightarrow$

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}u(t)$$
$$y(t) = -\frac{1}{R}x(t) + \frac{1}{R}u(t)$$

Le modèle est de la forme

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \qquad \text{(I)}$$
$$y(t) = cx(t) + du(t) \qquad \text{(II)}$$

- (I) : équation dynamique du 1er ordre fonction de $x(t)$
- (II) : relation statique reliant la sortie $y(t)$ et la variable $x(t)$

Pour établir une relation entre $y(t)$ et $u(t)$, on passe par la variable intermédiaire $x(t)$ (tension aux bornes du condensateur)

Introduction à la représentation d'états

Réponse à une entrée échelon

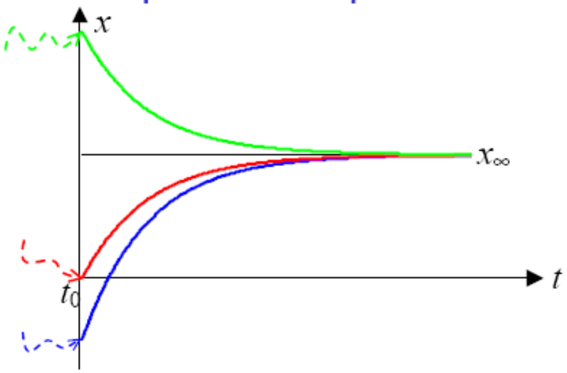
- A l'instant t_0, on ferme l'interrupteur $u(t) = U_0 \Gamma(t) \quad t > t_0$
- Tension initiale aux bornes du condensateur : $x(t_0) = V_c(t_0)$

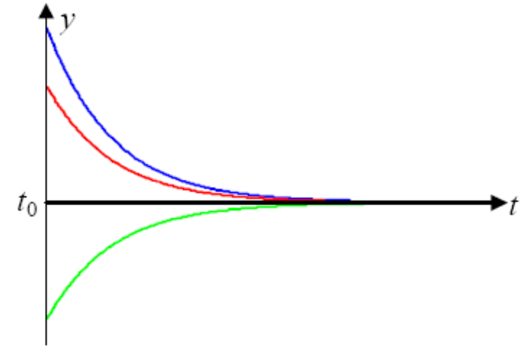
Solution des équations

$$x(t) = e^{-\frac{t-t_0}{RC}} x(t_0) + \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{RC}}\right) U_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{R} x(t) + \frac{1}{R} u(t)$$

Réponse temporelle





Introduction à la représentation d'états

Remarques

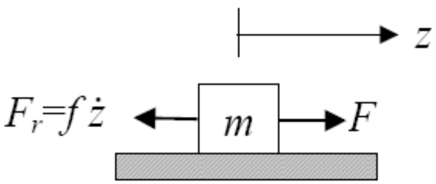
- La connaissance de $x(t)$ (et donc de $y(t)$) sur l'intervalle de temps $[t_0,\ t]$ ne dépend que de la condition initiale $x(t_0)$ et des équations (I) et (II)
- La connaissance de x sur l'intervalle de temps $]-\infty,\ t_0]$ n'est pas nécessaire pour déterminer x sur $[t_0, t]$
- Si à l'instant t_1, on applique un nouveau signal d'entrée $u_1(t)$, l'évolution de $x(t)$ et $y(t)$ dans l'intervalle $[t_1,\ t]$ ne dépendra que de $x(t_1)$ et de $u_1(t)$ sur cet intervalle

Définitions

- $x(t)$ est appelé l'**état** du circuit électrique
- L'état d'un système à un instant t représente la **mémoire minimale** du passé nécessaire à la détermination du futur
- Les équations (I) et (II) définissent entièrement le comportement dynamique du circuit électrique

Introduction à la représentation d'états

Exemple 2 : système mécanique (masse en translation)



Entrée : $u(t) = F$

Sortie : $y(t) = z(t)$

Modélisation dynamique : équation différentielle et FT

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow F = m\ddot{z} + f\dot{z} \Rightarrow H(s) = \frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{s(ms+f)}$$ (Système d'ordre 2)

Représentation d'état

Etats du système $x_1(t) = z(t)$

$x_2(t) = \dot{z}(t)$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{z}(t) = x_2(t) \quad (1)$$

$$F = m\ddot{z} + f\dot{z} \Rightarrow F = m\dot{x}_2(t) + f x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{F}{m} - \frac{f}{m}x_2(t) \quad (2)$$

(1) et (2) sous forme matricielle

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} F \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN

Introduction à la représentation d'états

Représentation d'état

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} F \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y(t) = CX + Du \end{cases}$$

avec

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{f}{m} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = 0$$

Remarques

- $X(t)$ est appelé vecteur d'état du système
- Par rapport à la fonction de transfert, le modèle d'état donne des informations sur la représentation interne du système (ici $\dot{z}$) qui n'apparaissent pas explicitement dans la fonction de transfert
- Le système d'ordre 2 est converti dans la représentation d'état en une équation différentielle matricielle d'ordre 1 et une équation statique matricielle

Introduction à la représentation d'états

Généralisation à un système multi-entrée, multi-sortie

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU & \text{(I)} \\ Y = CX + DU & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) : équation d'état ou équation de commande

(II) : équation de sortie ou équation d'observation

- Variables
  - $X(t)$: vecteur d'état

    $X(t) \in \mathbb{R}^n$ (n : nombre d'états) $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$

  - $U(t)$: vecteur des entrées

    $U(t) \in \mathbb{R}^m$ (m : nombre d'entrées) $U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$

  - $Y(t)$: vecteur des sorties

    $Y(t) \in \mathbb{R}^p$ (p : nombre de sorties) $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$

Introduction à la représentation d'états

- Matrices de la représentation d'état
  - A : matrice d'état

    $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matrice carrée)
  - B : matrice d'entrée

    $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$
  - C : matrice de sortie

    $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$
  - D : matrice de couplage

    $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ Souvent $D = 0$

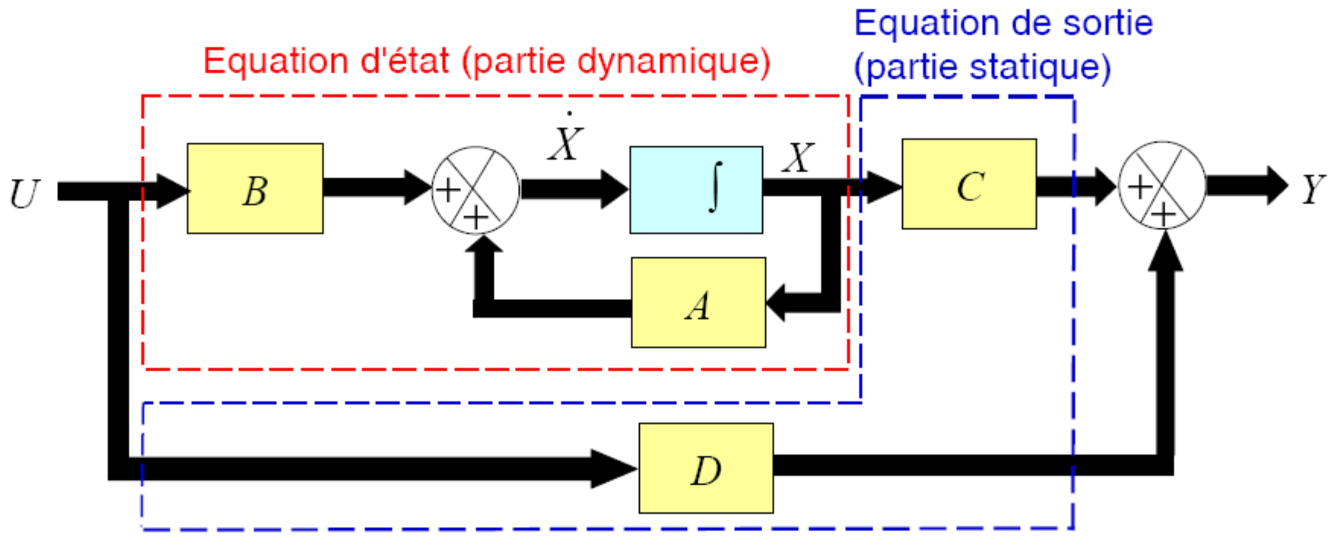
- Remarques
  - (I) : l'équation d'état est une équation dynamique d'ordre 1
  - (II) : l'équation de sortie est une équation statique linéaire reliant les sorties aux entrées et aux états

⬇

Toute la dynamique interne du système est résumée dans l'équation d'état, notamment dans la matrice A. En effet, si U=0, on a le système libre caractérisé par $\dot{X} = AX$.

Les valeurs propres de A sont les pôles du système

Introduction à la représentation d'états



❑ Interprétation du schéma

- Equation d'état = vue interne du système
- A représente les interactions dynamiques entre les différents éléments internes du système
- B représente l'action des entrées sur l'évolution dynamique du système
- C indique les capteurs permettent d'obtenir les sorties
- D indique le couplage direct entre les entrées et les sorties

Choix des variables d'état

Préliminaires et définitions

- L'état d'un système à l'instant t_0 est un n-uplet $X(t_0)$ d'un espace $\mathcal{E}$ dont la connaissance associée à celle de l'entrée $u(t)$ dans l'intervalle $[t_0, \ t]$ permet de connaître la sortie $y(t)$.
- $\mathcal{E}$ est appelé espace d'état. $\mathcal{E}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.
- Le nombre minimal d'état correspond à l'ordre du système
- Le concept d'état découle donc d'une suite de grandeurs physiques (courant, vitesse, …) ou non suffisantes pour caractériser le fonctionnement d'un système. Le choix des états est laissé au libre arbitre du concepteur
- Par une transformation linéaire, il est possible de passer d'une représentation d'état à une autre équivalente
- Un système admet donc une infinité de représentation d'état
- Par la transformation linéaire $X(t) = TX_T(t)$, on peut avoir des variables d'état qui physiquement ne correspondent à rien

Choix des variables d'état

Quelques éléments pour la sélection des variables d'état

On choisit souvent comme variables d'états, des éléments du système susceptibles d'être des réservoirs d'énergie

Elément	Energie	Etat
Inductance	$\frac{1}{2}Li^2$	i
Condensateur	$\frac{1}{2}CV_c^2$	V_c
Masse m	$\frac{1}{2}mv^2$	$v = dx/dt$ x
Ressort k	$\frac{1}{2}kx^2$	x

Elément	Energie	Etat
Moment d'inertie J	$\frac{1}{2}m\omega^2$	$\omega = d\theta/dt$ θ
Colonne de fluide de pression p	$\frac{1}{2}(V/\beta)p^2$	p
Colonne de fluide de hauteur h	$\frac{1}{2}\rho A h^2$	h

Lien entre différentes représentations

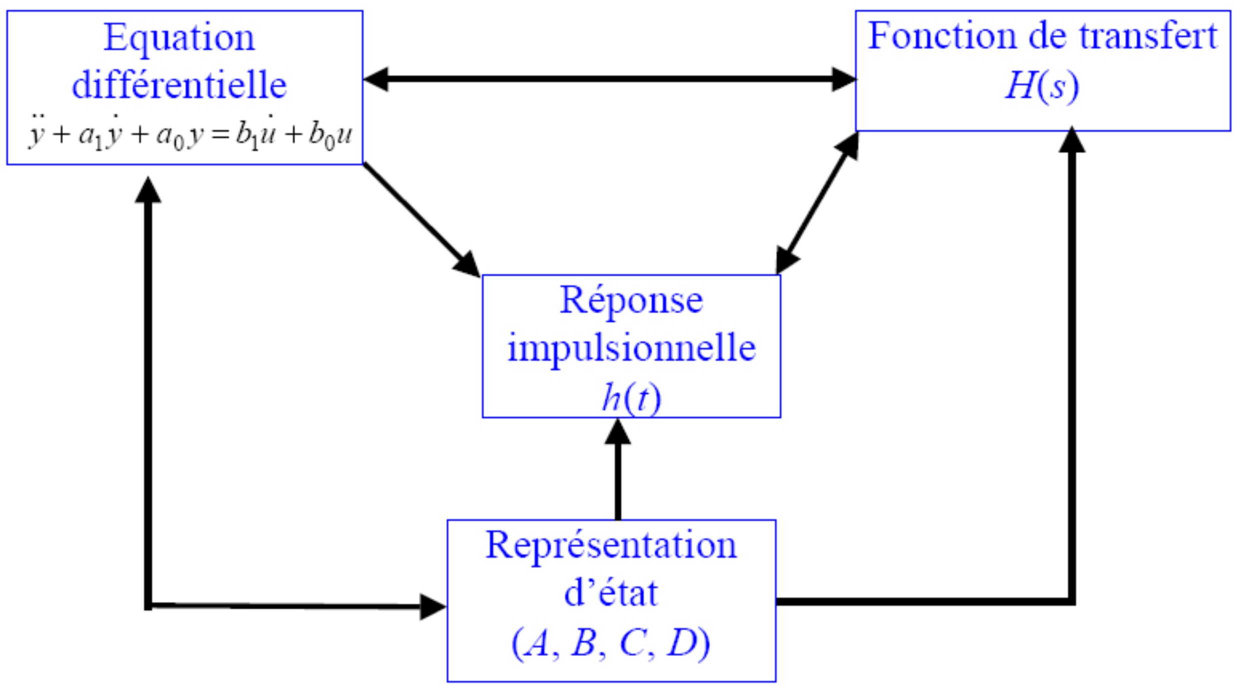
FT ⟺ Représentation d'état

Lien entre différentes représentations

Descriptions d'un système

- Equation différentielle
- Réponse impulsionnelle
- Fonction (ou matrice) de transfert $H(s)$
- Représentations d'état (A, B, C, D)

Liens entre les descriptions



Lien entre différentes représentations

Passage représentation d'état → FT

- Forme générale

$$\begin{cases} \dot{X} = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad C \in \mathbb{R}^{p\times n}$

$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

$X(t) \in \mathbb{R}^{n}$

$U(t) \in \mathbb{R}^{m}$

$Y(t) \in \mathbb{R}^{p}$

- TL de l'équation d'état

Conditions initiales supposées nulles : $X(0)=0$

$$\mathcal{L}\left(\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)\right) \longrightarrow sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI_n - A)^{-1} BU(s)$$

I_n : matrice identité d'ordre n

- TL de l'équation de sortie

$$\mathcal{L}(Y(t) = CX(t) + DU(t)) \longrightarrow Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \left(C(sI_n - A)^{-1}B + D\right)U(s)$$

$$\Downarrow$$

Fonction de transfert ou matrice de transfert

$$H(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

Lien entre différentes représentations

Passage représentation d'état → FT (MT)

Remarques

- Calcul de l'inverse de $(sI_n - A)$

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{(com(sI_n - A))^T}{\det(sI_n - A)}$$

$M = com(sI_n - A)$

matrice des cofacteurs

$M = [m_{i,j}]$ avec $m_{i,j} = (-1)^{i+j} \det M_{i,j}$

$M_{i,j}$: matrice extraite de $(sI_n - A)$ en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne

- Nouvelle écriture de $H(s)$

$$H(s) = \frac{C(com(sI_n - A))^T B}{\det(sI_n - A)} + D \quad \longrightarrow \quad H(s) = \frac{C\,(com(sI_n - A))^T\,B + \det(sI_n - A)D}{\det(sI_n - A)}$$

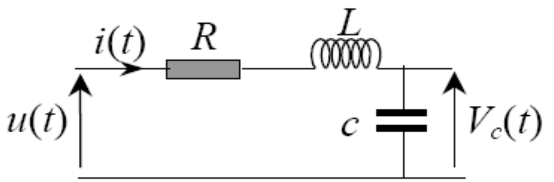
Les pôles du système sont les racines de l'équation $\det(sI_n - A) = 0$

Les pôles du système sont les valeurs propres de A. Toute l'information sur les modes du système est contenue dans la matrice A

Lien entre différentes représentations

Passage représentation d'état → FT

- Exemple 1 : système mono-entrée, mono-sortie



Entrée : $u(t)$

Sortie : $y(t) = V_c(t)$

Etats du système

$x_1(t) = V_c(t) \quad x_2(t) = i(t)$

$X(t) = [V_c(t)\ i(t)]^T$

Modèle d'état (voir cours 8)

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1/c \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}}_{B} u \\ y = [1 \quad 0] X \end{cases} \Rightarrow sI_2 - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/c \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}$$

Fonction de transfert

$$sI_2 - A = \begin{bmatrix} s & -1/c \\ 1/L & s + R/L \end{bmatrix} \Rightarrow \det(sI_2 - A) = s(s + R/L) + 1/Lc \Rightarrow \det(sI_2 - A) = \frac{Lc\,s^2 + Rcs + 1}{Lc}$$

$$com(sI_2 - A) = \begin{bmatrix} s + R/L & -1/L \\ 1/c & s \end{bmatrix} \Rightarrow C(com(sI_2 - A))^T B = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} s + R/L & 1/c \\ -1/L & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$C(com(sI_2 - A))^T B = \frac{1}{Lc} \Rightarrow H(s) = \frac{C(com(sI_2 - A))^T B}{\det(sI_2 - A)} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{Lc\,s^2 + Rcs + 1}$$

Passage représentation d'état → FT (MT)

- Exemple 2 : système multi-entrée, multi-sortie

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}_{B} U \\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X \end{cases}$$

avec $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ $U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$ $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$

Calcul de la matrice de transfert

$$sI_2 - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow sI_2 - A = \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(sI_2 - A) = s^2 + 4s + 5$$

$$com(sI_2 - A) = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$C(com(sI_2 - A))^T B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow C(com(sI_2 - A))^T B = \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ s-1 & -2(s+4) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C(com(sI_2 - A))^T B = \begin{bmatrix} 4 & 3s+5 \\ 4(s+4) & 5(s+1) \end{bmatrix}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN

Lien entre différentes représentations

Passage représentation d'état → FT (MT) : exemple 2

- Exemple 2 (suite)

$$H(s) = \frac{C(com(sI_2 - A))^T B}{\det(sI_2 - A)} \longrightarrow H(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{s^2+4s+5} & \frac{3s+5}{s^2+4s+5} \\ \frac{4(s+4)}{s^2+4s+5} & \frac{5(s+1)}{s^2+4s+5} \end{bmatrix}$$

Dans le cas de système multi-entrée, multi-sortie, on parle de *matrice de transferts* (MT) au lieu de fonction de transfert.

Signification des éléments de la matrice de transferts de l'exemple

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$H_{11}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} \qquad H_{12}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_2(s)}$$

$$H_{21}(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} \qquad H_{22}(s) = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = H(s) \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} Y_1(s) = H_{11}(s)U_1(s) + H_{12}(s)U_2(s) \\ Y_2(s) = H_{21}(s)U_1(s) + H_{22}(s)U_2(s) \end{cases}$$

Lien entre différentes représentations

Passage représentation d'état → FT (MT)

Remarques

- Une représentation d'état d'un système est caractérisée par le quadruplet (A, B, C, D)
- Toute représentation d'état (A, B, C, D) d'un système qui vérifie $H(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$ est appelée une ***réalisation*** de $H(s)$
- Une réalisation (A, B, C, D) avec $\dim(A)=n$ est une *réalisation minimale* s'il n'existe pas d'autres réalisations de $H(s)$ de dimension inférieure à n
- Dans le cas d'un système mono-entrée, mono-sortie, la réalisation minimale correspond à une fraction rationnelle irréductible (pas de simplification des pôles et zéros)

Notion de Commandabilité

Stabilité d'un état
Théorèmes de Commandabilité

Analyse de la stabilité dans l'espace d'état

❑ Représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{X} = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}$

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $\quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$X(t) \in \mathbb{R}^{n}$

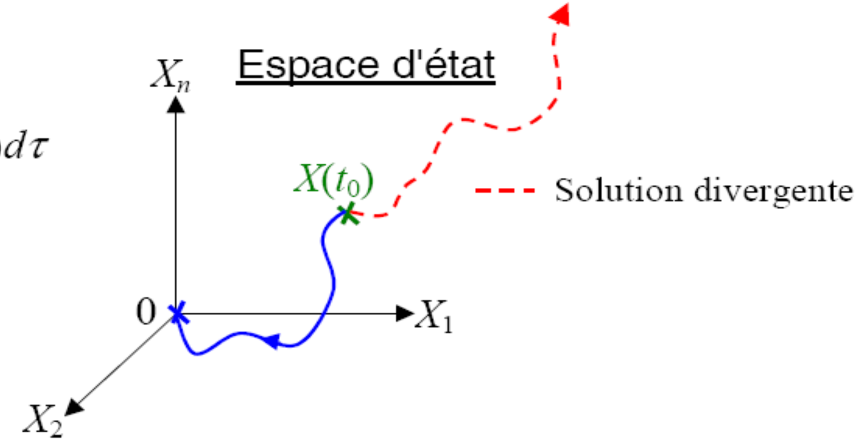
$U(t) \in \mathbb{R}^{m}$

$Y(t) \in \mathbb{R}^{p}$

◆ Réponse libre du système

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau$$

$$U(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0)$$



❑ Analyse de la stabilité

Le système est stable si la solution $X(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$. Le système est instable autrement et la solution diverge

$$\left(\lim_{t \to +\infty} X(t) = \lim_{t \to +\infty} e^{A(t-t_0)} X(t_0) = 0, \quad \forall\, X(t_0) \right) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} e^{A(t-t_0)} = 0$$

Notion de Commandabilité

Analyse de la stabilité dans l'espace d'état

Conditions de stabilité

Sous quelle condition $\lim_{t \to +\infty} e^{A(t-t_0)} = 0$?

Analysons un cas particulier : la matrice A admet n valeurs propres λ_i distinctes → A est diagonalisable

$$A = TDT^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

T : matrice des vecteurs propres de A

$$e^{A(t-t_0)} = Te^{D(t-t_0)}T^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{A(t-t_0)} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 (t-t_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n (t-t_0)} \end{bmatrix} T^{-1}$$

$e^{A(t-t_0)} \to 0$ pour $t \to +\infty$ si les termes $e^{\lambda_i t}$ convergent càd $e^{\lambda_i t} \to 0$

Cette condition est satisfaite si toutes les valeurs propres λ_i sont à partie réelle strictement négative

Théorème

Un système linéaire invariant est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de la matrice d'état A sont à partie réelle strictement négative

Analyse de la stabilité dans l'espace d'état

Exemple 1

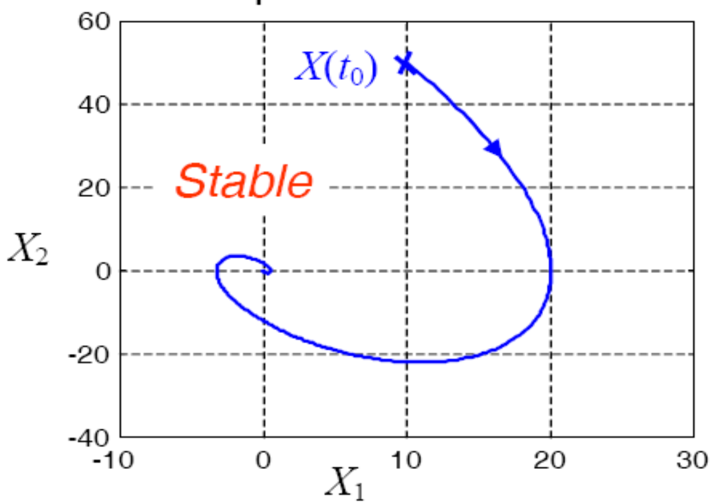
$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$$

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres

$$\lambda_1 = -1 + j\sqrt{3}$$
$$\lambda_2 = -1 - j\sqrt{3}$$

Réponse libre



Exemple 2

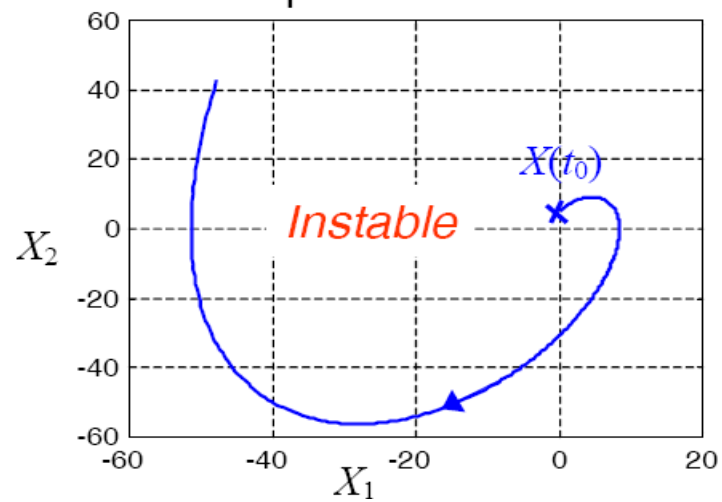
$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$$

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres

$$\lambda_1 = 1 + j\sqrt{3}$$
$$\lambda_2 = 1 - j\sqrt{3}$$

Réponse libre



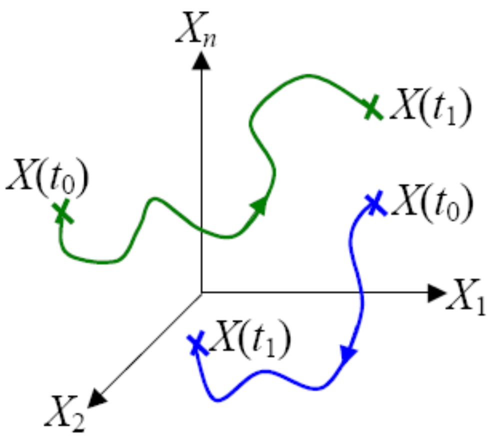
Notion de Commandabilité

Commande dans l'espace d'état

Notions de commandabilité de l'état

Définition

Un système d'équation d'état $\dot{X} = AX + BU$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$) est dit complètement commandable sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$, $t_1 < \infty$ s'il existe une commande $U(t)$ définie sur $[t_0, t_1]$ permettant de faire évoluer le système d'un état initial quelconque $X(t_0)$ à un état désiré quelconque $X(t_1)$.



Existe-t-il une commande $U(t)$ qui fait évoluer le système de l'état $X(t_0)$ à un état $X(t_1)$ en un temps fini $\Delta t = t_1 - t_0$? Si oui, le système est dit complètement commandable.

Peut-on trouver un critère mathématique permettant de déterminer la commandabilité ?

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN

Commandabilité de l'état

Critère mathématique

Théorème

Un système d'équation d'état $\dot{X} = AX + BU$ $(A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m})$ est complètement commandable à la condition nécessaire et suffisante que la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A, B)$ soit de rang n.

Matrice de commandabilité :

$$\mathcal{C}(A,B) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}(A,B) \in R^{n\times(n.m)}$$

Remarque

Dans le cas d'un système mono-entrée, la matrice de commandabilité est une matrice carrée

$$m = 1 \Longrightarrow \mathcal{C}(A,B) \in R^{n\times n}$$

Commandabilité de l'état

❑ Critère mathématique

◆ Remarques

- La notion de commandabilité de l'état ne porte que sur l'équation d'état et donc sur les matrices A et B. Dire que le système est commandable équivaut à dire que la paire (A, B) est commandable

- Dans le cas d'un système mono-entrée, la matrice de commandabilité est une matrice carrée d'où le corollaire :

Corollaire

Un système mono-entrée u d'équation d'état $\dot{X} = AX + Bu$ est complètement commandable ssi $\det(\mathcal{C}(A, B)) \neq 0$

- Approche pratique de vérification de la commandabilité
  - Former la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A, B)$
  - Calculer le rang de $\mathcal{C}(A, B)$
  - En déduire que le système est commandable si $\mathrm{rang}(\mathcal{C}(A, B)) = n$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN

Notion de Commandabilité

Commandabilité de l'état

- Exemples

<u>Exemple 1</u>

$$\dot{X} = AX(t) + BU(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$n = 2$ états $\qquad m = 2$ entrées

Matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A,B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2\times 4}$

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}(A,B) = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Matrice de rang 2
→ système commandable

<u>Exemple 2</u>

$$\dot{X} = AX(t) + BU(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$n = 2$ états $\qquad m = 1$ entrée

Matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A,B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \alpha - 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}(A,B) = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathcal{C}(A,B)) = \alpha - 3$$

Le système est commandable ssi le det est non nul càd $\alpha \neq 3$

Notion d'observabilité

Observabilité d'un état
Dualité Commandabilité-observabilité

Notion d'observabilité

Observabilité de l'état

Notions d'observabilité

Système d'équation d'état

$$\begin{cases} \dot{X} = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}$$

$X(t) \in \mathbb{R}^n$ $\quad Y(t) \in \mathbb{R}^p$ $\quad U(t) \in \mathbb{R}^m$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

Définition

Un système est dit complètement observable sur l'intervalle de temps $[0, t_1]$, $t_1<\infty$ si la connaissance de $U(t)$ et $Y(t)$ sur cet intervalle permet de déterminer la valeur initiale de l'état $X_0 = X(0)$.

Analyse

L'observabilité implique la reconstructibilité

L'observabilité permet d'obtenir X_0 . Connaissant X_0 , on peut reconstruire l'état $X(t)$ $\forall\ t \geq 0$ par :

$$X(t) = e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau$$

Le problème de la reconstruction des états se ramène à un problème d'estimation de la condition initiale

Observabilité de l'état

- Critère mathématique d'observabilité

Théorème

Un système représenté par les équations $\dot{X} = AX + BU$ et $Y = CX + DU$ est complètement observable à la condition nécessaire et suffisante que la matrice d'observabilité $\mathcal{O}(C, A)$ soit de rang n.

Matrice d'observabilité

$$O(C,A) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$O(C,A) \in \mathbb{R}^{(p.n)\times n}$$

Généralement, $p < n$ (le nombre de sorties mesurées est inférieur au nombre d'états)

Remarque

Dans le cas d'un système mono-sortie, la matrice d'observabilité est une matrice carrée

$$p = 1 \Longrightarrow O(C,A) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Notion d'observabilité

Observabilité de l'état

Critère mathématique

- **Remarques**

  - La notion d'observabilité de l'état ne porte que sur les matrices A et C. Dire que le système est observable équivaut à dire que la paire (C, A) est observable

  - Dans le cas d'un système mono-entrée, la matrice d'observabilité est une matrice carrée d'où le corollaire

Corollaire

Un système mono-entrée u, mono-sortie y est complètement observable ssi $\det(\mathcal{O}(C, A)) \neq 0$

- Approche pratique de vérification de l'observabilité
  - Former la matrice d'observabilité $\mathcal{O}(C, A)$
  - Calculer le rang de $\mathcal{O}(C, A)$
  - En déduire que le système est observable si $\text{rang}\,(\mathcal{O}(C, A))=n$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN

Observabilité de l'état

Exemple 1

$$\begin{cases} \dot{X} = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

$n = 3$ états

$p = 2$ sorties

$$O(C,A) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}, O(C,A) \in R^{6\times 3} \quad \Rightarrow \quad O(C,A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -7 \\ 22 & -6 & -1 \\ 8 & -2 & 19 \end{bmatrix}$$

Matrice de rang 3
→ système observable

Notion d'observabilité

Observabilité de l'état

- Exemple 2

$$\begin{cases} \dot{X} = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

$n = 2$ états

$p = 1$ sortie

$$O(C,A) = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}, O(C,A) \in R^{2\times 2}$$

$$O(C,A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha - 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(O(C,A)) = -\alpha - 1$$

Le système est observable ssi le det est non nul càd $\alpha \neq -1$

Dualité commandabilité-observabilité

(A, B) commandable $\Leftrightarrow$ $\text{rang}(\mathcal{C}(A, B))=n$ avec $\mathcal{C}(A,B)=\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $\text{rang}(\mathcal{C}^T(A, B))=n$

$$\Leftrightarrow \quad \text{rang}\left(\mathcal{C}^T(A,B)\right)= rang\begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T\left(A^T\right)^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

$\Leftrightarrow$ la paire (B^T, A^T) est observable

- Conséquences
  - (A, B) commandable $\Leftrightarrow$ (B^T, A^T) observable
  - Si le système ayant la réalisation (A, B, C, D) *est commandable* alors son *système dual* de réalisation (A^T, C^T, B^T, D) *est observable*
  - (C, A) observable $\Leftrightarrow$ (A^T, C^T) commandable