Les options

Steve Ambler

Département des sciences économiques

École des sciences de la gestion

Université du Québec à Montréal

automne 2004

Table des matières

1 Introduction

– Les buts de ce chapitre sont les suivants :
  1. Présenter l'intuition derrière l'évaluation des options.
  2. Relier la célèbre formule de d'évaluation des options de Black-Scholes (1972, 1973) et Merton (1973) à cette intuition qui provient de modèles plus simples (par exemple le modèle basé sur une distribution des prix uniforme et la neutralité face au risque).

3. Fournir une introduction au contrats à terme et la façon de les évaluer.

2 Définitions et concepts de base

- Produit dérivé : un actif dont le prix dépend du prix d'un autre actif ou d'autres actifs.
- Option d'achat (**"call option"**) : option d'acheter des titres.
- Option de vente (**"put option"**) : option de vendre des titres.
- Option européenne : donne le droit d'acheter ou de vendre seulement au jour d'échéance.
- Option américaine : donne le droit d'acheter ou de vendre **jusqu'à** la date d'échéance.
- Prix d'exercice : prix auquel l'acheteur a le droit d'acheter (vendre) le titre.
- Date d'échéance : date à laquelle (option européenne) ou avant laquelle (option américaine) l'acheteur de l'option doit exercer son droit d'acheter (vendre) le titre.
- En jeu (**"in the money"**) : le prix courant du titre est supérieur ou égal au prix d'exercice (option d'achat) ou inférieur ou égal au prix d'exercice (option de vente).
- À parité (**"at the money"**) : le prix courant du titre est égal au prix d'exercice.
- Hors-jeu (**"out of the money"**) : le prix courant du titre est inférieur au prix d'exercice (option d'achat) ou supérieur au prix d'exercice (option de vente).
- Contrat à terme (**"forward or futures contract"**) : titre qui oblige le détenteur à acheter ou à vendre une marchandise particulière à une date et un prix stipulés.
- Contrat à terme de gré à gré (**"forward contract"**) : la valeur d'un contrat à terme de gré à gré peut fluctuer si le prix anticipé de la marchandise (de la date d'exécution du contrat) fluctue.
- Contrat à terme boursier (**"futures contract"**) : le prix à terme (le prix auquel le contrat sera exécuté à son échéance) est révisé pour maintenir une valeur du contrat qui est nul. Le compte du détenteur du contrat est crédité (débité) chaque d'un montant égal au changement du prix à terme (**"marking to market"**).

3 Détermination du prix d'une option européenne

- On analyse d'abord les options européennes. La possibilité d'exercer une option américaine avant sa date d'échéance rend leur analyse beaucoup plus difficile.
- On commence avec un cas très simple où le prix du titre à la date d'échéance suit une loi uniforme et où les individus sont neutres face au risque.
- Ce cas aide à comprendre l'intuition de base de l'évaluation du prix d'une option.
- Par la suite, on laisse tomber l'hypothèse de la neutralité vis à vis du risque (mais en simplifiant la loi qui engendre le prix de l'action en fin de période — nous remplacerons la distribution uniforme par une distribution binomiale).
- La dernière étape sera de supposer que le prix du titre à la date d'échéance suit une loi log-normale. Dans cette section, nous allons voir la célèbre formule de Black-Scholes (1972).

3.1 Distribution des prix uniforme et neutralité face au risque

- On suppose que les participants au marché sont neutres face au risque. On revient aussi dans un monde soit où il n'y a pas d'inflation soit où le taux d'inflation est parfaitement prévisible. Le prix d'une action en fin de période nous permet de calculer son taux de rendement réel (on fait abstraction aussi des dividendes).
- Puisque l'individu est neutre face au risque, il s'agit de calculer la valeur espérée de l'option en fin de période, et ensuite de l'actualiser au taux de rendement certain.
- On évalue des actions qui n'ont pas de paiement de dividende.
- Un peu de notation :
  - $V_{s,0}$: prix de l'action en début de période
  - $V_{s,1}$: prix de l'action en fin de période
  - V_H : prix maximal de l'action en fin de période
  - V_L : prix minimal de l'action en fin de période
  - $V_{c,0}$: valeur de l'option d'achat en début de période
  - $V_{c,1}$: valeur de l'option d'achat en fin de période
  - $V_{p,0}$: valeur de l'option de vente en début de période
  - $V_{p,1}$: valeur de l'option de vente en fin de période

  - X : prix d'exercice de l'option
  - r_F : taux de rendement sans risque
- On suppose que le prix d'une action en fin de période suit une loi uniforme. Il y a un prix maximal (V_H) et un prix minimal (V_L). Il y a la même probabilité (densité) d'obtenir n'importe quel prix entre V_L et V_H.
- La valeur espérée d'une variable aléatoire qui suit une loi uniforme est tout simplement égale à :
$$\frac{V_H + V_L}{2}$$
- La valeur d'une option d'achat à la fin de la période est : $\max(V_{s,1} - X, 0)$. Si le prix de l'action est supérieur au prix d'exercice, l'option vaut la différence entre les deux. Si le prix de l'action est inférieur au prix d'exercice, l'option ne vaut rien.
- La valeur espérée de cela est une espérance conditionnelle : la valeur espérée de l'option **si** $V_{s,1} - X > 0$, multipliée par la probabilité que $V_{s,1} - X > 0$. Si le prix d'exercice est entre V_L et V_H, l'option sera exercée avec une probabilité entre 0 et 1. Nous avons :
$$\left[\frac{V_H - X}{2}\right]\left[\frac{V_H - X}{V_H - V_L}\right] = \frac{(V_H - X)^2}{2(V_H - V_L)} = E(V_{c,1}).$$
Le premier terme est la valeur espérée de l'option **si** le prix de l'action est supérieur au prix d'exercice. Le deuxième terme donne la probabilité que le prix de l'action est supérieur au prix d'exercice.
- Si $X < V_L$, l'option sera exercée avec certitude. Sa valeur (en fin de période) doit être égale à :
$$\frac{V_H - X + V_L - X}{2} = \frac{V_H + V_L}{2} - X = E(V_{s,1}) - X.$$
- Pour calculer la valeur de l'option d'achat en début de période, on actualise sa valeur de fin de période utilisant le taux de rendement certain.
$$V_{c,0} = \frac{1}{1 + r_F} V_{c,1},$$
où on utilise la version appropriée de $V_{c,1}$.
- La valeur d'une option de vente à la fin de la période est : $\max X - V_{s,1}, 0$
- De manière semblable au cas d'une option d'achat, on a :
$$E(V_{p,1}) = \left[\frac{X - V_L}{2}\right]\left[\frac{X - V_L}{V_H - V_L}\right] = \frac{(X - V_L)^2}{2(V_H - V_L)}.$$

- Si $X > V_H$, l'option sera exercée avec certitude. Sa valeur (en fin de période) doit être égale à :

$$\frac{X - V_H + X - V_L}{2} = X - \frac{V_H + V_L}{2} = X - E(V_{s,1}).$$

- Prenons un exemple numérique. Soit les données suivantes :

Variable	Valeur
V_H	50
V_L	10
X	30
r_F	0.10

- On suppose que le prix d'exercice est identique qu'il s'agit d'une option d'achat ou d'une option de vente.
- Dans ce cas, il faut que le prix de l'action soit égal à :

$$V_{s,0} = \frac{1}{1.10} \frac{50 + 10}{2} = 27.27.$$

  Ceci est tout simplement la valeur actualisée du prix espéré (en fin de période) de l'action.
- Étant donné le prix espéré en fin de période (30) et le prix d'exercice de 30, ni l'option d'achat ni l'option de vente ne seront exercées avec certitude.
- La valeur d'une option d'achat en fin de période va être dans ce cas :

$$V_{c,1} = \frac{50 - 30}{2} \frac{50 - 30}{50 - 10} = 5$$

- Sa valeur en début de période va être dans ce cas :

$$V_{c,0} = \frac{1}{1.10} 5 = 4.55$$

  La valeur d'une option de vente en fin de période va être dans ce cas :

$$V_{p,1} = \frac{30 - 10}{2} \frac{30 - 10}{50 - 10} = 5$$

- Sa valeur en début de période va être :

$$V_{p,0} = \frac{1}{1.10} 5 = 4.55$$

– Nous pouvons aussi analyser l'impact sur les prix d'options d'un changement du prix courant de l'action.
– Il s'agit de déplacer V_H et V_L sans changer $(V_H - V_L)$. Donc, on ne change pas la variance de la distribution, mais seulement sa moyenne.
– Le tableau ci-dessous donne un résumé des calculs.

X	V_H	V_L	$E(V_{s,1})$	$V_{s,0}$	$V_{c,0}$	$V_{p,0}$
30	40	0	20	18.18	1.14	10.23
30	50	10	30	27.27	4.55	4.55
30	60	20	40	36.36	10.23	1.14
30	70	30	50	45.45	18.18	0.00
30	80	40	60	54.55	27.27	0.00
30	90	50	70	63.64	36.36	0.00

– À partir de la quatrième rangée du tableau ($V_H = 70$), l'option d'achat est sûr d'être exercée, puisque le prix minimal de l'action est 30, ce qui est égal au prix d'exercice. L'option de vente ne vaut plus rien puisqu'il faut acquérir l'action pour un prix au moins égal au prix d'exercice de l'option. La formule pour évaluer la valeur de l'option d'achat est celle où l'exercice est certain :

$$V_{c,1} = \frac{70+30}{2} - 30 = 20$$

$$\Rightarrow V_{c,0} = \frac{1}{1.10} 20 = 18.18$$

– De manière semblable, on a pour la cinquième rangée du tableau :

$$V_{c,1} = \frac{80+40}{2} - 30 = 30$$

$$\Rightarrow V_{c,0} = \frac{1}{1.10} 30 = 27.27$$

– Pour la dernière rangée du tableau, on a :

$$V_{c,1} = \frac{90+50}{2} - 30 = 40$$

$$\Rightarrow V_{c,0} = \frac{1}{1.10} 40 = 36.36$$

– Voir les Graphiques 9.1 et 9.2.
– Pour approfondir un peu la compréhension de ces graphiques, nous pouvons calculer les pentes des courbes qui relient les prix d'option au prix courant de l'action.

FIG. 1 – Relation entre prix de l'action et prix de l'option d'achat

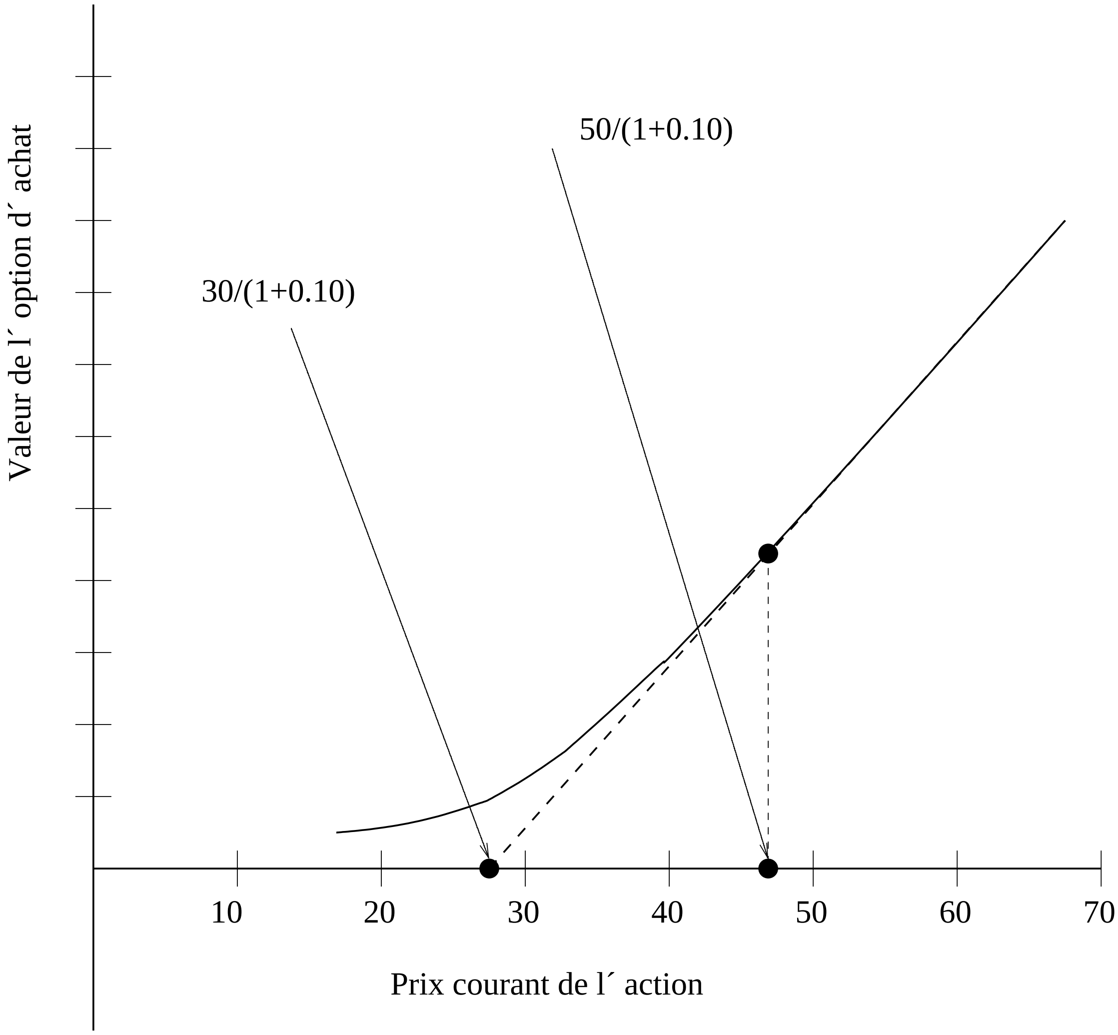
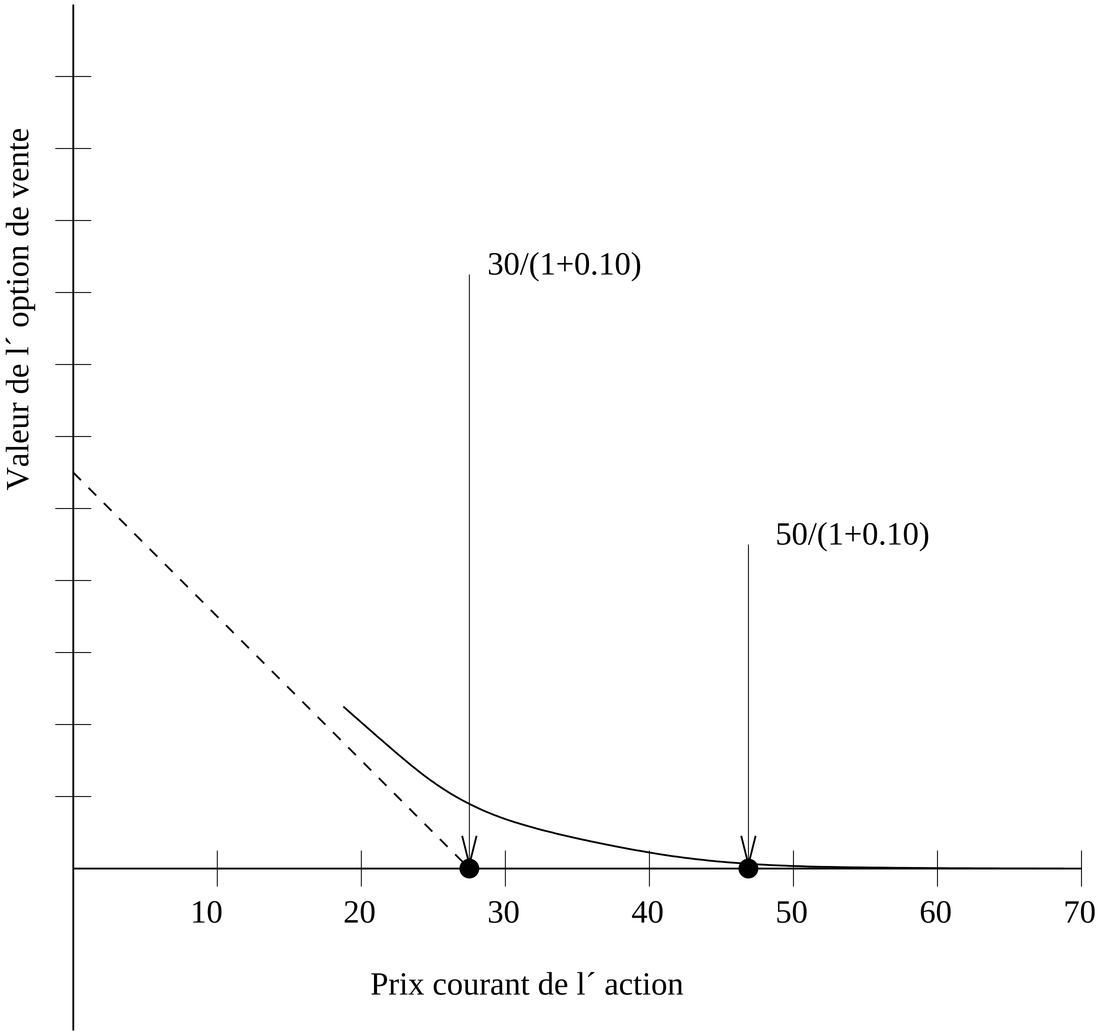


FIG. 2 – Relation entre prix de l'action et prix de l'option de vente



– On peut facilement dériver l'impact d'une variation du prix anticipé de l'action sur le prix d'équilibre d'une option d'achat. Pour que son prix anticipé change, il faut (avec une distribution uniforme) que les bornes de la distribution changent. Ici, on suppose que V_H et V_L changent par des montants égaux, laissant la différence entre les deux $(V_H - V_L)$ inchangée. D'abord, si la probabilité d'exercice est 1, on a :

$$\frac{\partial E(V_{c,1})}{\partial E(V_{s,1})} = 1$$

– Si la probabilité d'exercice est entre 0 et 1, on a :

$$\left.\frac{\partial E(V_{c,1})}{\partial E(V_{s,1})}\right|(dV_H = dV_L) = \frac{2(V_H - X)}{2(V_H - V_L)} = \frac{V_H - X}{V_H - V_L}.$$

– Cette dérivée est égale tout simplement à la probabilité que l'option soit exercée.
– Avec la neutralité face au risque, le prix courant d'une action n'est que la valeur actualisée (au taux de rendement certain) de son prix espérée de fin de période.
– Dans les plans $V_{s,0}/V_{c,0}$ et $V_{s,0}/V_{p,0}$, nous pouvons dériver les courbes pour (respectivement) une option d'achat et une option de vente qui sont comme les Graphiques 10.1 et 10.2.
– On mesure sur l'axe horizontal le prix courant de l'action et sur l'axe vertical la valeur de l'option (soit d'achat soit de vente).
– On garde constant pour construire ces graphiques l'écart entre prix maximal et prix minimal $(V_H - V_L)$.
– La ligne pointillée sur le Graphique 10.1 part du point sur l'axe horizontal qui donne la valeur actualisée du prix d'exercice.
– Au delà du point où l'option d'achat sera exercée avec une probabilité égale à un, une augmentation du prix de l'action doit mener à une augmentation égale du prix de l'option. Pourquoi ? Le prix courant de l'action n'est que la valeur actualisée du prix en fin de période. Si ce prix augmente par une unité, la valeur espérée en fin de période de l'option augmente aussi, puisque celle-ci n'est que la valeur espérée de l'action en fin de période moins le prix d'exercice.
– La ligne solide du Graphique 10.1 ne rejoint jamais l'axe horizontal. La raison est simple. Dans la mesure où l'écart entre prix maximal et prix minimal est 40, le prix maximal ne peut jamais être inférieur à 40, ce qui donne un

prix minimal de 0. À ce prix final, l'option a une probabilité de 0.25 d'être exercée.

- La ligne solide du Graphique rejoint l'axe horizontal au point où la probabilité d'exercice de l'option de vente devient égale à zéro.
- Elle ne rejoint jamais la ligne pointillée puisque le prix maximal en fin de période de l'action ne peut jamais être inférieur à 40. À ce prix, l'option a encore une probabilité non nulle d'être exercée (0.25).
- Ces courbes ressemblent de très près aux courbes que l'on obtient avec la formule Black-Scholes, sauf qu'elles rejoignent l'axe horizontal et la droite avec une pente de 1 (-1 dans le cas d'une option de vente) qui part de la valeur actualisée du prix d'exercice. Comparez 10.1 et 10.2 avec 10.4 et 10.5.
- Ceci montre que l'aversion au risque, qui est présente dans le modèle de Black-Scholes, n'est pas importante. Les (petites) différences entre les courbes dans les 2 modèles vient du fait que le "support" d'une distribution uniforme (écart entre valeurs maximale et minimale) est finie tandis qu'elle est infinie (le prix minimal est 0, mais le prix maximal n'a pas de limite) dans le cas de la loi log-normale.
- On peut aussi montrer que le prix d'une option (d'achat ou de vente) augmente avec la variance du prix de l'action en fin de période.
- Refaisons le calcul de la valeur d'une option d'achat et de vente lorsque $V_H = 70$ et $V_L = 10$. Le prix espéré de l'action en fin de période est encore 40, mais la variance est plus grande que lorsque $V_H = 60$ et $V_L = 20$. Le prix courant de l'action doit encore être égal à 36.36. Notez que la neutralité au risque est important ici. Si l'action garde la même corrélation avec le marché, nous avons vu que selon le MÉDAF son rendement espéré devrait augmenter avec son écart type et donc son prix devrait baisser.
- Nous avons le tableau suivant :

V_H	V_L	$E(V_{s,1})$	$V_{s,0}$	$V_{c,0}$	$V_{p,0}$
60	20	40	36.36	10.23	1.14
70	10	40	36.36	12.12	3.03

- Qu'est-ce qui explique ce phénomène ?
- Si le prix maximal augmente à 70, la valeur maximale en fin de période de l'option d'achat augmente à 40. Sa valeur minimale est encore zéro, puisqu'il est toujours possible de ne pas exercer l'option. La probabilité d'une valeur nulle a augmentée (à 0.33 au lieu de 0.25), mais la valeur conditionnelle de l'option **si** elle est exercée a augmenté.
- Dans le cas de l'option de vente, la probabilité d'exercice augmente (de 0.25

à 0.33), et en plus la valeur conditionnelle de l'option **si** elle est exercée augmente.
– Nous retrouverons cette relation positive entre la variance de prix d'une action et le prix des options d'achat et de vente de l'action dans le modèle de Black-Scholes.

3.2 Distribution des prix binomiale et aversion au risque

Nous changeons dans cette section nos hypothèses concernant le prix de l'action en fin de période. On suppose qu'il n'y a que deux prix possibles. Nous admettons l'aversion au risque dans cette section, mais nous allons utiliser une combinaison d'achat d'options et d'actions qui permet de construire un rendement certain. Ceci est important pour montrer pourquoi l'aversion au risque n'est pas importante dans la théorie d'évaluation des options de Black-Scholes.

3.2.1 Modèle binomial avec échéance d'une période

– Option d'achat : Nous illustrons avec un exemple numérique.
– On suppose un prix d'achat de 100 d'une action qui peut valoir soit 90 soit 120 à la fin de la période. Supposons une option d'achat européenne avec prix d'exercice égal à 110. On suppose un taux de rendement certain de 10%.
– Comment couvrir son risque si on achète l'option ? Le prix de l'action et le prix de l'option varient dans le même sens (pourquooi ?), et donc il faut acheter l'une et vendre l'autre.
– On fait le calcul suivant. Si l'action vaut 120 à la fin de la période, l'option d'achat vaudra 10. Si l'action vaut 90 à la fin de la période, l'option d'achat vaudra zéro. Pour calculer le nombre d'options à vendre pour chaque action achetée (ou vice versa) on fait le calcul suivant :

$$\frac{120-90}{10-0} = 3.0.$$

– Qu'est-ce qui arrive si on achète une action et on vend trois options d'achat ? À la fin de la période, si l'action vaut 120 on aura 120 moins la valeur des options qui seront exercées par ceux qui les ont achetées. Ils vont demander d'acheter (à un prix de 110) une action qui coûte 120 sur le marché. Vous perdez au total 30 pour couvrir les trois options vendues. La valeur nette du portefeuille est 90. Si, à la fin de l'année, l'action vaut 90, les acheteurs des options n'exerceront pas leur droit d'acheter. Vous aurez une action qui vaut 90 et une valeur nette du portefeuille de 90.

- Donc, peu importe ce qui arrive vous avez une valeur nette (certaine) de 90.
- On sait comment calculer une valeur actualisée. Il faut que le taux de rendement de ce portefeuille, qui a un rendement certain, soit égal à 10%. Donc, on a :
$$\frac{90}{1.10} = 100 - 3 \cdot V_{c,0}.$$
- Le prix de l'option d'achat est l'inconnu dans cette équation. Il faut donc que $V_{c,0} = 6.06$
- Pour les options de vente, on procède de la même façon, sauf qu'il faut tenir compte que le prix de l'action et la valeur de l'option varie en sens inverse (pourquoi ?).
- Supposons les mêmes paramètres que dans l'exemple de l'option d'achat, y compris un prix d'exercice de 110.
- Maintenant, il faut vendre ou acheter simultanément l'action et des options.
- Si l'action vaut 120 à la fin de la période, l'option de vente ne vaut rien. Si l'action vaut 90 à la fin de la période, l'option de vente vaut 20. Pour calculer le nombre d'options à acheter pour chaque action achetée on fait le calcul suivant :
$$\frac{120 - 90}{20 - 0} = 1.5.$$
- Si on achète deux actions, il faut acheter trois options de vente. Maintenant, si l'action vaut 120 en fin de période, la valeur du portefeuille est 240, puisque les options de vente ne valent rien. Si l'action vaut 90 en fin de période, chaque option de vente vaut 20. La valeur du portefeuille sera 180 en actions plus 60 en options pour un total de 240. Puisque le placement a un taux de rendement sans risque, il faut que son taux de rendement soit égal à 10%. Nous pouvons calculer le prix d'équilibre de l'option de vente comme la solution à l'équation suivante :
$$\frac{240}{1.10} = 2 \cdot 100 + 3 \cdot V_{p,0}$$
- Il faut donc que $V_{p,0} = 6.06$. Le coût total de construire le portefeuille est donc 218.18.
- Dans ces exemples, il est important de saisir comment calculer le ratio de la variation du prix de l'action par rapport à la variation de la valeur de

l'option (en fin de période) pour savoir comment construire un portefeuille sans risque à partir de l'action elle-même et l'option.

3.2.2 Modèle binomial avec échéance de deux périodes

- Option d'achat : nous illustrons encore une fois avec un exemple numérique. Les paramètres du problème sont décrits ci-dessous et illustrés par le Tableau 10.1.
- Le prix courant de l'action est 100. Chaque année, le prix peut soit augmenter par 20% soit diminuer par 10%. Donc, si le prix est 120 à la fin de la première année, il peut soit augmenter à 144 soit baisser à 108. Si le prix est 90 à la fin de la première année il peut soit augmenter à 108 soit baisser à 81.
- On suppose une option d'achat avec prix d'exercice de 110 qui expire à la fin de la deuxième année. À la fin de la deuxième année, si le prix de l'action est soit 81 soit 108, l'option ne vaut rien. Si le prix est 144, l'option vaut 34.
- Maintenant, on considère la valeur de l'option à la fin de la première année. Si le prix de l'action est 90 à la fin de la première année, l'option ne vaut rien. Peu importe ce qui arrive, le prix de l'action en fin de deuxième année sera inférieur au prix d'exercice. Si le prix de l'action est 120, l'option doit avoir une valeur positive puisqu'il y a des chances que sa valeur à la fin de la deuxième année soit non nulle. L'écart entre le prix maximal et le prix minimal est 36. L'écart entre la valeur maximale de l'option et sa valeur minimale est 34. Donc, pour chaque action que l'on achète, il faut vendre le nombre d'options donné par :
$$\frac{144-108}{34-0} = 1.0588.$$
- Supposons que l'on achète 10 000 actions et que l'on vend 10 588 options.
- Maintenant, si le prix de l'action est 144 à la fin de la deuxième année, nous détiendrons 1 440 000 en actions mais les acheteurs de nos options vont les exercer. Couvrir chaque option va nous coûter 34, et donc nous allons perdre 360 000. La valeur totale de notre portefeuille sera 1 080 000. Si le prix de l'action est 108 à la fin de la deuxième année, nous détiendrons 1 080 000 en actions seulement. Notre placement est sans risque (bien sûr ! !). Si le taux de rendement sans risque est toujours 10%, il faut que :
$$\frac{1\ 080\ 000}{1.10} = 120 \cdot 10\ 000 - V_{c,1} \cdot 10\ 588$$

$$\Rightarrow V_{c,1} = 20.61$$

– Maintenant, il faut reculer un an pour considérer le problème du point de vue du début de la première année. Les deux valeurs possibles pour l'option en fin de première année sont 20.61 et 0.0. Les deux prix possibles de l'action sont 120 et 90. Pour créer un portefeuille sans risque, il faut encore acheter des actions et vendre des options (ou vice versa). Le ratio est donné par :

$$\frac{120 - 90}{20.61 - 0} = 1.4556.$$

– Supposons que l'on achète 10 000 actions et que l'on vend 14 556 options. Si le prix de l'action est 90 en fin de première année, notre portefeuille vaut 900 000. Si le prix de l'action est 120 en fin de première année, nous avons une valeur de 1 200 000 en actions mais nous allons perdre $20.61 \cdot 14\ 556 = 300\ 000$ pour couvrir nos options. Donc, on a un portefeuille qui vaut 900 000 peut importe ce qui arrive.
– La valeur de l'option en première année (toujours supposant un taux de rendement sans risque de 10%) est donnée par la solution à l'équation suivante :

$$\frac{900\ 000}{1.10} = 100 \cdot 10\ 000 - 14\ 556 \cdot V_{c,0}$$

$$\Rightarrow V_{c,0} = 12.49.$$

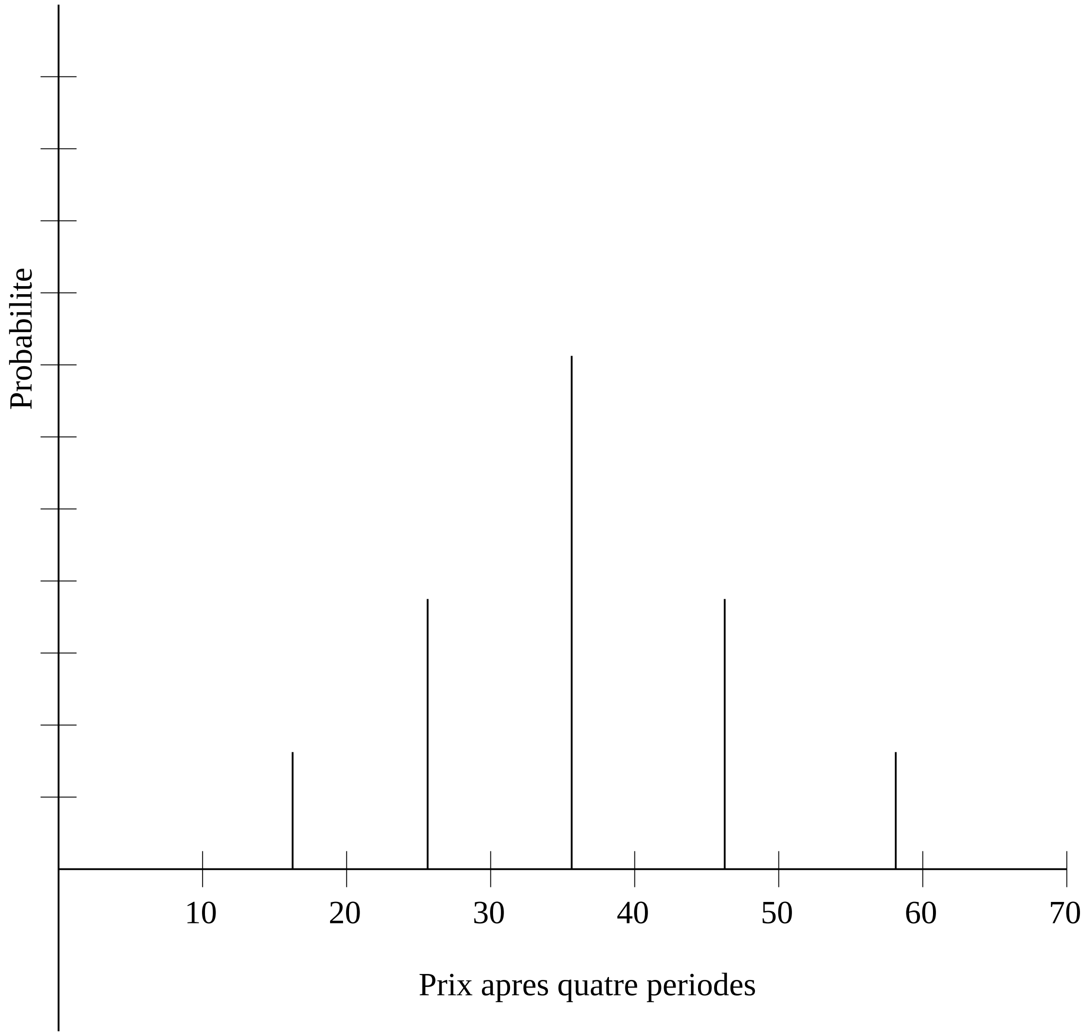
– Dans cet exemple, il est important de saisir l'idée qu'on commence à la **fin** et on recule. On peut facilement calculer les valeurs de l'option à son échéance. Par la suite, on applique la même méthodologie que pour l'évaluation d'une option avec échéance d'une seule période pour calculer la valeur de l'option pour tous les prix d'action possible une période avant l'échéance de l'option. Finalement, on applique encore cette méthodologie pour calculer la valeur de l'option au présent.
– On constate que l'option avec échéance de deux ans a un prix d'équilibre plus élevé que l'option avec une échéance d'un an. Ceci est dû au fait que le gain potentiel augmente tandis que le montant que l'on peut perdre est toujours limité à zéro. Il s'agit du même phénomène que l'impact de l'augmentation de la variance sur le prix d'une option.

3.2.3 Modèle binomial avec échéance de plusieurs périodes

– Un exemple numérique d'une option avec échéance de quatre périodes est illustré par le Graphique 17.13 dans Haugen (2001).

– Ici, on suppose que chaque trimestre le prix de l'action peut soit augmenter par 17,5% soit descendre par 15%. Même si ce n'est pas nécessaire de le faire afin d'évaluer la valeur d'une option d'achat, on va supposer que la probabilité d'une augmentation du prix est 0,5. La distribution des prix en fin d'année pour un cas simple est illustrée par le Graphique 9.3.

FIG. 3 – Distribution binomiale après 4 périodes : exemple illustratif



– Notez que lorsque le nombre de périodes augmente, la distribution des prix de l'action à l'échéance de l'option commence à ressembler de plus en plus une distribution log-normale.

- On peut obtenir le modèle Black-Scholes comme la limite du modèle binomial lorsqu'on découpe le temps jusqu'à l'échéance en tranches de plus en plus fines.
- Une autre remarque importante s'impose. Afin de maintenir un portefeuille qui est complètement sans risque de trimestre en trimestre, il faut rééquilibrer le portefeuille pour ajuster le ratio d'actions par rapports aux options. Dans le modèle de Black et Scholes, qui est la limite du modèle binomial, il faut rééquilibrer le portefeuille à chaque instant dans le temps.

3.3 Distribution des prix normale et aversion au risque : le modèle de Black-Scholes

- Théorie développée par Black et Scholes (1972, 1973) et Merton (1973).
- L'argument de Black et Scholes est bien expliqué par Campbell, Lo et MacKinlay (1997, p.339) :

  > "The fundamental insight of the Black-Scholes and Merton models is that under certain conditions an option's payoff can be exactly replicated by a particular dynamic investment strategy involving only the underlying stock and riskless debt. This particular strategy may be constructed to be **self-financing**, i.e., requiring no cash infusions except at the start and allowing no cash withdrawals until the option expires ; since the strategy replicates the option payoff at expiration, the initial cost of this self-financing investment strategy must be identical to the option's price, otherwise an arbitrage opportunity will arise. This no-arbitrage condition yields not only the option's price but also the means to replicate the option synthetically — via the dynamic investment strategy of stocks and riskless debt — if it does not exist."

- On suppose au départ un taux de rendement qui est donné par un processsus de **diffusion**. Le log du taux de rendement suit une loi normale avec une moyenne constante mais avec une variance qui augmente avec l'échéance. Notez que l'augmentation de la variance avec l'échéance est exactement ce que l'on a vu avec la distribution binomiale.
- On suppose aussi l'aversion au risque, mais avec la possibilité de construire un portefeulle sans risque (avec l'action et l'option ensemble), le degré

d'aversion au risque des individus n'affecte pas le prix d'équilibre de l'option.

– La formule de Black-Scholes pour le prix d'une option d'achat européenne qui ne paie pas de dividende est :

$$V_c = V_s N(d_1) - \frac{X}{\exp(r_F t)} N(d_2),$$

où V_c est la valeur de l'option en début de période, V_s est le prix courant de l'action, r_F est le taux d'intérêt sans risque lorsque l'intérêt est composé de manière continuelle, t est l'échéance de l'option, et $N(\cdot)$ est la loi normale cumulative, la probabilité d'obtenir une valeur inférieure ou égale à l'argument de la fonction pour une loi normale standardisée (moyenne nulle et variance unitaire). Finalement, on a :

$$d_1 = \frac{\ln(V_s/X) + [r_F + 0.5\sigma^2(r)]\, t}{\sigma(r)\sqrt{t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma(r)\sqrt{t},$$

où $\sigma^2(r)$ est une mesure de la variance "**instantanée**" du prix de l'action, i.e. sur un intervalle de temps très très court. Puisque la variance **jusqu'à échéance** du prix de l'action augmente avec t (une des propriétés fondamentales d'un processus de diffusion), $\sigma^2(r)$ est multiplié partout dans la formule par t (ce qui veut dire que l'écart type $\sigma(r)$ est multiplié par $\sqrt{t}$).

– Afin de calculer le prix d'équilibre d'une option, il faut fournir des valeurs pour les inputs suivants : V_s, X, $\sigma^2(r)$, t et r_F.

– La formule n'est pas forcément très intuitive. Sans connaître le calcul stochastique, le Lemme d'Ito, etc., il est à toutes fins pratiques impossible de **dériver** la formule.[1]

– Par contre, on peut montrer que la valeur d'une option d'achat dépend : directement de V_s, inversément de X, directement de t (dans la mesure où il n'y a pas de paiements de dividendes), directement de $\sigma(r)$, et directement de r_F. Dans le plan V_s/V_c, on a une courbe de la forme représentée par le Graphique 9.4.

– La formule pour une option de vente est :

$$V_p = V_c + \frac{X}{\exp(r_F t)} - V_s.$$

FIG. 4 – Relation entre prix de l’action et prix de l’option d’achat dans Black-Scholes

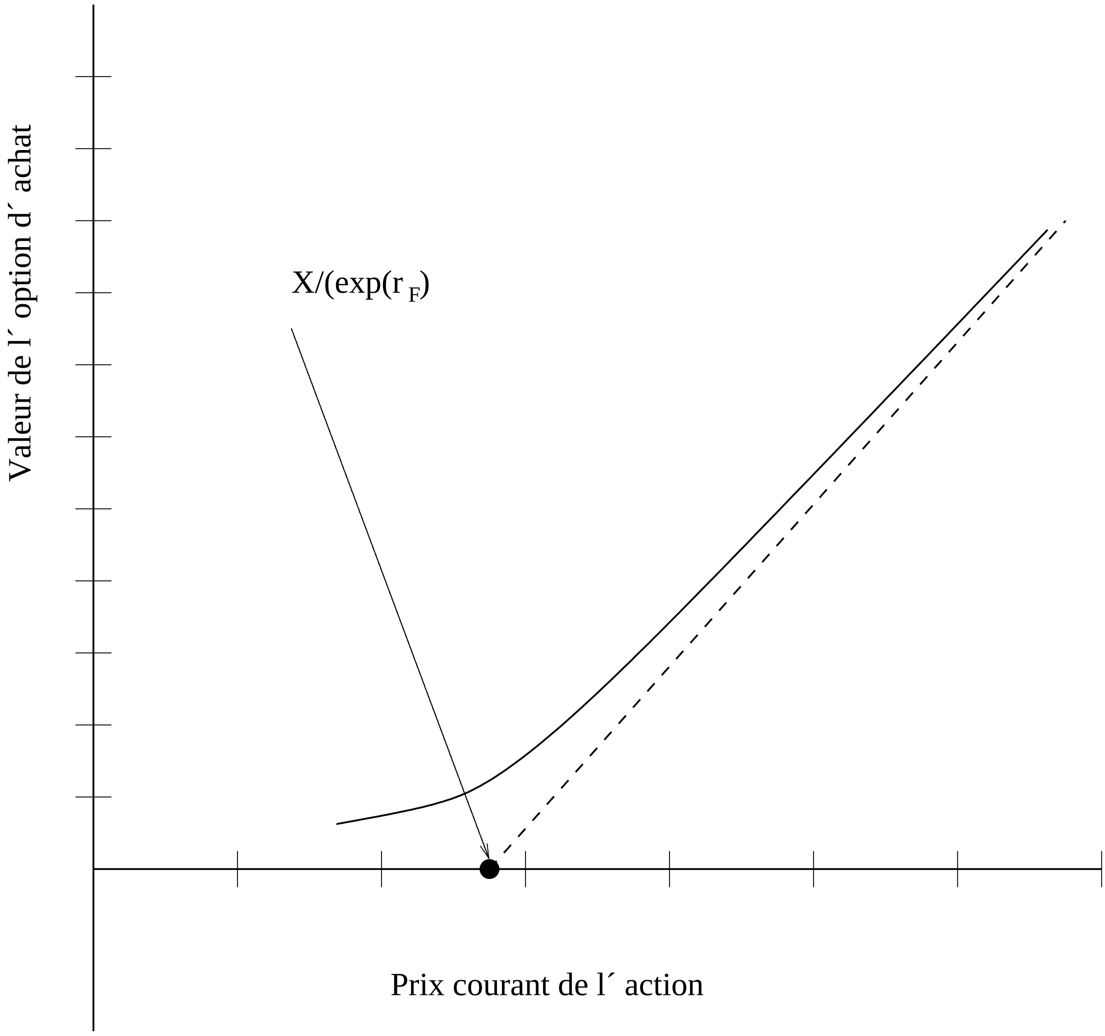
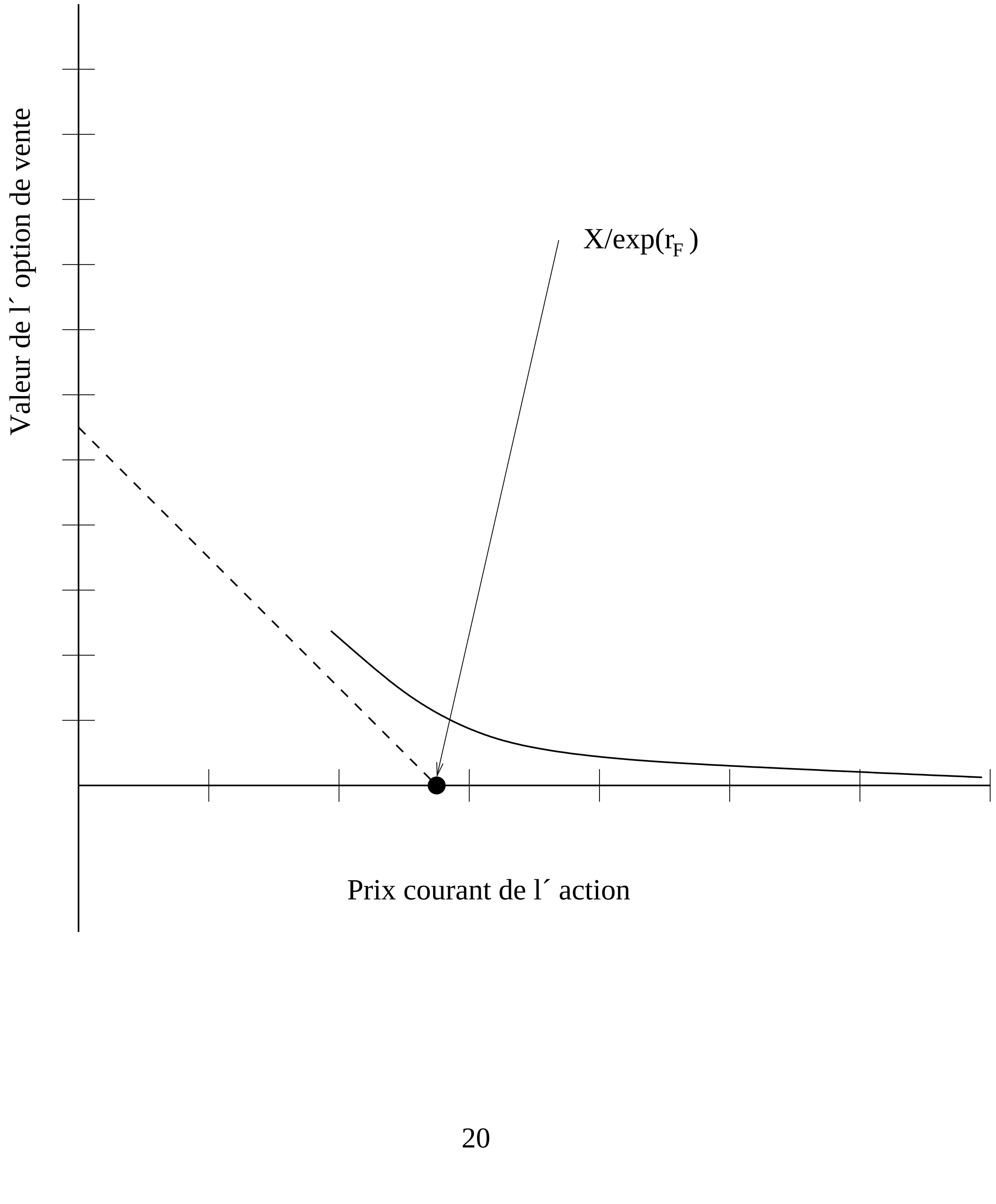


FIG. 5 – Relation entre prix de l'action et prix de l'option de vente dans Black-Scholes



– On obtient une courbe de la forme représentée par le Graphique 9.5.
– On peut modifier la formule Black-Scholes relativement facilement pour tenir compte de paiements de dividendes avant l'échéance de l'option. Dans le cas d'une option d'achat, nous avons :

$$V_c^* = \left(V_s - \frac{D}{e^{r_F t^*}}\right) N(d_1) - \frac{X}{\exp(r_F t)} N(d_2),$$

où t^* est le nombre de périodes jusqu'au paiement de la dividende. Donc, il faut soustraire la valeur actualisée de la dividende du prix de l'action.
– Dans le cas d'une option de vente, nous avons :

$$V_p^* = V_c^* + \frac{X}{\exp(r_F t)} - \left(V_s - \frac{D}{e^{r_F t^*}}\right).$$

– Dans le cas des options américaines, les paiements de dividendes affectent l'incitation à exercer l'option avant son échéance. (Voir la sous-section sur les options américaines.)

3.3.1 Estimation de la variance du taux de rendement

4 Détermination du prix d'une option américaine

– On veut montrer dans cette section sous quelles conditions on peut continuer à utiliser la formule Black-Scholes pour évaluer une option américaine.
– En principe, la possibilité d'exercer l'option avant son échéance a une valeur, et donc peut faire dévier le prix d'une option américaine du prix d'une option européenne qui, à part la possibilité de l'exercice anticipé, est identique.
– Ce qu'on peut montrer, pour les options d'achat qui ne paient pas de dividende avant leur échéance, elles ne seront jamais exercées avant leur échéance, ce qui rend la valeur de l'exercice anticipé sans valeur, et ce qui implique que l'on peut utiliser la formule Black-Scholes pour les évaluer.

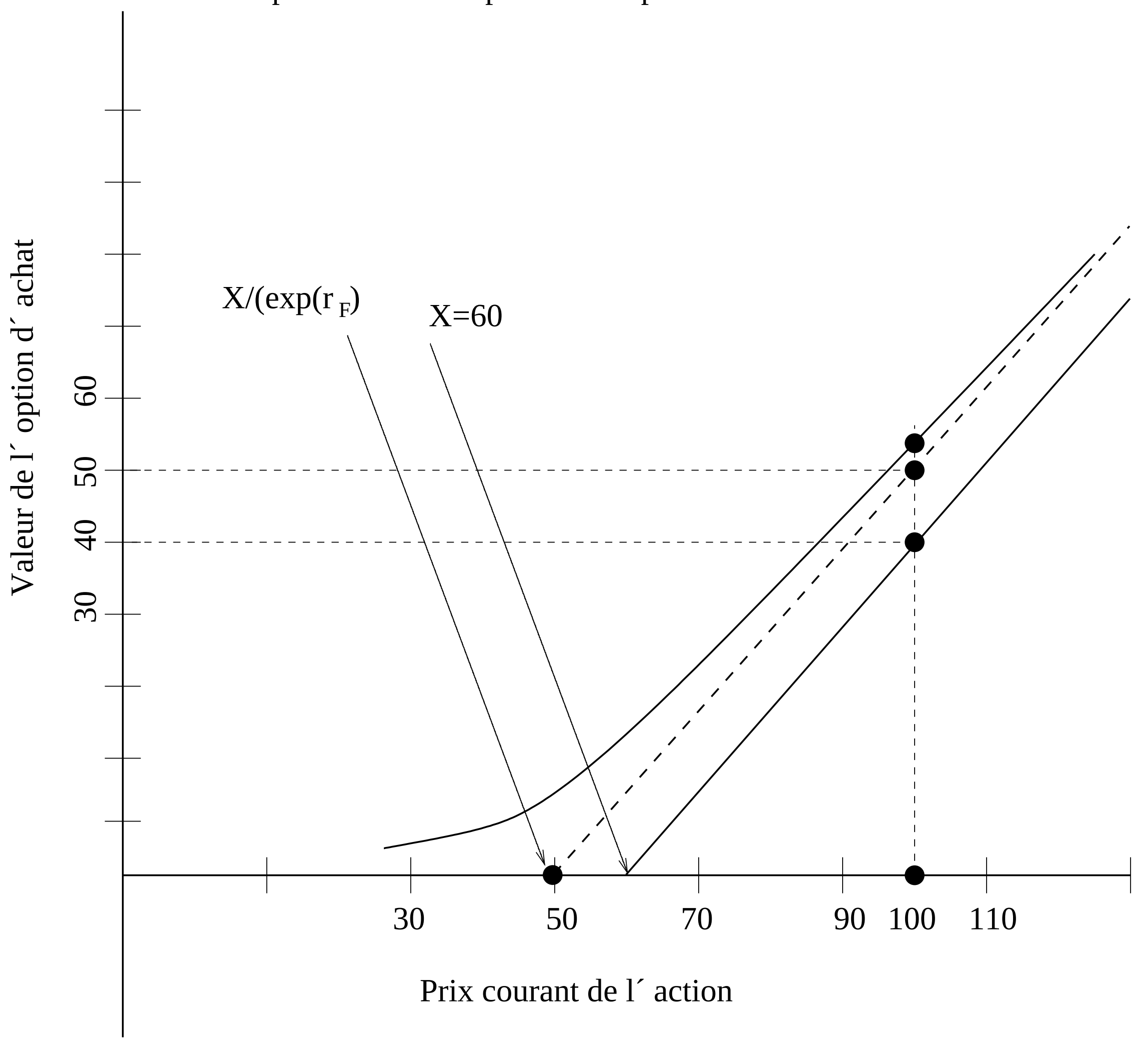
[1]Si vous avez vu une telle démonstration, je serai ravi de connaître la source !

4.1 Prix planchers des options américaines

4.1.1 Plancher “dur” sous le prix d’une option d’achat

- Supposons une action dont le prix est 100$, et une option d’achat avec un prix d’exercice de 60$. La valeur de l’option ne peut jamais descendre en bas de 40$. Voir le Graphique 9.6.

FIG. 6 – Prix plancher sous le prix d’une option américaine d’achat



- On suppose ici une valeur actualisée du prix d’exercice de 50$.

- Sinon, on peut acheter l'option, l'exercer tout de suite, et revendre l'action au prix de 100$. Le coût total va être donné par :

$$V_{c,0} + X.$$

- Si $V_{c,0} < 40$, ce coût est inférieur à 100$, et donc on a une "machine à sous".
- Le concept du plancher "dur" est donc basé sur un argument d'arbitrage pur.
- Le prix de l'option doit augmenter ou le prix de l'action doit diminuer pour empêcher cette possibilité **d'arbitrage**.
- Pour résumer notre argument, la valeur du plancher dur est égal à :

$$\max\left(V_s - X\ ,\ 0\right).$$

- Si le prix de l'option est supérieur au plancher dur, elle ne sera pas exercée. Exercer l'option revient à acquérir l'action, et on peut acquérir l'action pour moins cher en vendant l'option à son prix sur le marché et en achetant l'action à son prix sur le marché. On a forcément :

$$V_s - V_c < V_s - (V_s - X) = X$$

  puisque

$$V_c > (V_s - X)$$

  On suppose un prix de l'action au dessus du prix d'exercice (donc l'option d'achat est en jeu).

4.1.2 Plancher "mou" sous le prix d'une option d'achat

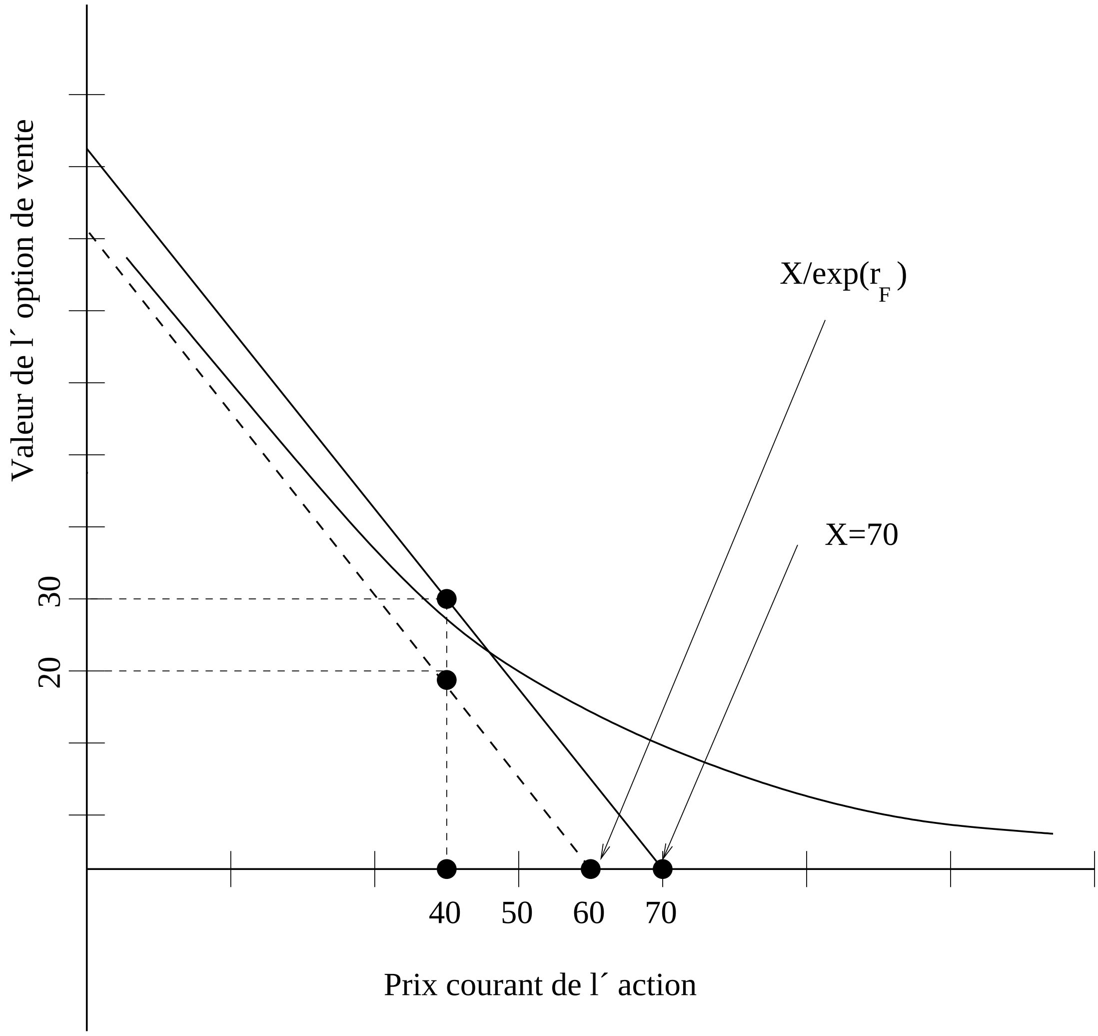
- Notez que cet argument est aussi valable pour une option européenne que pour une option américaine. Dans le cas du plancher "dur", l'argument est basé sur la possibilité d'exercer l'option tout de suite, et donc est valable seulement pour les options américaines.
- On verra que le plancher "mou" sous le prix d'une option d'achat est plus élevé que le plancher "dur". Pour cette raison, le plancher "dur" est superflu.
- Si le prix de l'action est encore 100$, et le prix d'exercice est 60, le prix ne peut pas descendre en bas de 50$.
- Sinon, on peut acheter l'option et une obligation sans risque avec une échéance d'une période qui coûte 50$. Notre coût total est donc 50 plus $V_{c,0}$, qui par hypothèse est inférieur à 100$.

- Maintenant, si le prix de l'action dépasse le prix d'exercice on exerce l'option et on a une action pour laquelle on a payé au départ **moins que** 100$, son prix initial sur le marché. On vient d'inventer une façon d'acheter une action en payant moins cher que son prix sur le marché.
- Si le prix de l'action est inférieur à 60$, le prix d'exercice, on n'exerce pas l'option et on a encore 60$, la valeur de l'obligation à son échéance.
- Donc, personne ne voudra payer 100$ pour acheter l'action. Le prix de l'action doit baisser et/ou le prix de l'option doit augmenter.
- Pour résumer et généraliser notre argument, la valeur du plancher mou est donné par :
$$\max\left(V_s - \frac{X}{1+r_F}\,,\, 0\right).$$
- Dans notre cas particulier, nous avons :
$$V_s - \frac{X}{1+r_F} = 100 - 50 = 50.$$

4.1.3 Plancher "dur" sous le prix d'une option de vente

- C'est un argument semblable au cas d'une option d'achat.
- Supposons une action avec un prix de 40$, et une option de vente avec un prix d'exercice de 70$. La valeur de l'option ne peut jamais être inférieure à 30$. Voir le Graphique 9.7. Supposons une valeur actualisée du prix d'exercice de 60.
- Sinon, on achète l'action et l'option pour un coût total inférieur à 70$. On exerce l'option tout de suite pour obtenir 70$. On a encore une machine à sous.
- Le plancher dur sous le prix d'une option de vente est donné par :
$$\max\left(X - V_s\,,\, 0\right).$$
- Notez (voir le Graphique 10.7) que pour certaines valeurs du prix de l'action, le plancher dur se trouve au dessus de la valeur de l'option selon la formule de Black-Scholes. Dans cette région, la formule ne peut être appliquée pour déterminer la valeur de l'option de vente américaine.
- Si le prix de l'option tombe en dessous du plancher dur, elle vaut plus "morte" (si on l'exerce) que "vivante".

FIG. 7 – Prix plancher sous le prix d'une option américaine de vente



4.1.4 Plancher “mou” sous le prix d’une option de vente

– Supposons les mêmes paramètres que dans le cas du plancher dur. La valeur du plancher mou est donnée par :

$$\max\left(\frac{X}{1+r_F} - V_s\,,\,0\right).$$

– Notez que dans le cas d’une option de vente, le plancher mou est en dessous du plancher dur. Donc, c’est le premier qui est superflu dans le cas des options de vente.
– Dans notre cas, on a

$$\frac{X}{1+r_F} - V_s = 60 - 40 = 20$$

– On peut cette fois-ci inventer une façon d’avoir un paiment final d’au moins X mais qui coûte moins que $X/(1+r_F)$.
– Si le prix de l’option est inférieur à 20, on achète une option de vente et l’action. Le coût total est V_s plus $V_{p,0}$, qui par hypothèse est inférieur à $X/(1+r_F)$.
– À l’échéance de l’option, si le prix de l’action est inférieur à son prix d’exercice, on exerce l’option et on la vend au prix X. Par contre, si le prix de l’action est supérieur au prix d’exercice, on garde l’action et on a plus que X.
– Donc, en fin de période on a au moins X, et on a payé initialement moins que $X/(1+r_F)$. À ce prix, tout le monde va acheter des options de vente au lieu d’acheter des obligations sans risque. Le prix d’équilibre des options de vente va devoir augmenter.

4.1.5 Conséquences

– À cause des planchers mou et dur, une option d’achat américaine ne sera pas exercée avant son échéance. On est justifié d’appliquer la formule de Black-Scholes pour l’évaluer, **si** l’action ne paie pas de dividendes avant l’échéance de l’option.
– Ceci est dû au fait essentiellement que la valeur de l’exercice anticipé de l’option est nulle.
– Dans le cas d’une option de vente, pour certaines valeurs du prix courant de l’action, le prix minimal déterminé par le plancher dur dépasse la valuer

de l'option donnée par la formule Black-Scholes. Donc, on n'est pas justifié d'appliquer la formule bêtement pour calculer la valeur d'une option de vente européenne.
– Dans les deux cas (option d'achat et option de vente), l'incitation à exercer l'option avant son échéance peut être affectée par un paiement de dividende avant l'échéance. C'est en fait le sujet de la sous-sous-section suivante.

4.1.6 Impact de dividendes sur l'exercice anticipé

– On peut imaginer des circonstances où le paiement d'une dividende crée une incitation à exercer une option avant son échéance, même dans le cas d'une option d'achat.
– Utilisons le Graphique 10.6 pour construire un tel exemple, pour le cas des options d'achat. Supposons que le prix courant de l'action est 100, ce qui donne un prix d'équilibre de l'option d'un peu plus de 50. Si vous l'achetez aujourd'hui, vous avez droit à une dividende de 20, mais si vous l'achetez demain, vous n'aurez pas droit au paiement de la dividende. L'action se vendra demain au prix de 80, et selon le graphique le prix d'équilibre de l'option tombera à 35. Si vous exercez l'option aujourd'hui, au prix d'exercice de 60, vous gagnez 40. Demain, vous aurez une option qui vaudra 35. Vous pouvez gagnez la différence, soit 5, en exerçant l'option aujourd'hui.
– Si, par contre, le paiement de dividende avait été 10 au lieu de 20, le prix de l'action serait tombé de 100 à 90, et le prix d'équilibre de l'option serait tombé à 42. Exercer l'option aujourd'hui vaudrait 40, tandis que l'option elle-même demain vaudrait 42. Il n'y a pas d'incitation à exercer immédiatement.
– Qu'en est-il des options de vente ? La possibilité d'un paiement de dividende dans ce cas-ci diminue l'incitation à exercer l'option. La raison est très simple. Considérons le Graphique 10.7 et supposons une action qui a un prix de 50. Si l'option a un prix inférieur à 20 et s'il n'y a pas de paiement de dividende, l'option vaut plus morte (20) que vivante et pourrait être exercée. Supposons par contre un paiement de dividende anticipé de 10. Si rien ne se passe depuis maintenant et le moment où l'action devient "ex dividende", son prix va tomber à 40. L'option vaudra 30 "morte" (si elle est exercée). Donc, on aura une incitation à garder l'option.
– La conclusion est qu'il faut faire très attention avant d'appliquer la formule de Black-Scholes à l'évaluation d'une option américaine lorsque il y a un paiement de dividende avant l'échéance de l'option, même dans le cas d'une

option d'achat.

– Dans un contexte où il peut y avoir une incitation à exercer une option avant son échéance, le modèle binomial peut être très utile pour l'évaluation.

4.2 Le modèle binomial pour évaluer les options américaines

– Comme d'habitude, utilisons un exemple numérique.
– Prenons une action dont le prix est 100 avec une option d'achat dont le prix d'exercice est 100 et une échéance de 2 ans. Le prix peut augmenter par 10% ou diminuer par 10% au cours de l'année. Il y aura un paiement de dividende à la fin de la première année de 10. On suppose un taux d'intérêt sans risque de 5%.
– Nous faisons une évaluation d'abord comme si l'option était une option européenne.
– Les deux prix possibles de l'action en fin de première année (ex dividende) sont 100 et 80. Les prix possible pour l'action en fin de deuxième année sont 110 ($100 \cdot 1.1$), 90 ($100 \cdot 0.9$), 88 ($80 \cdot 1.1$) ou 72 ($80 \cdot 0.9$).
– On sait que si le prix de l'action est 80 en fin de première année, l'option d'achat aura un prix de zéro (pourquoi ?). Si le prix de l'action est 90 (ex dividende) en fin de première année, il y a deux possibilités pour la valeur de l'option en fin de deuxième année : soit 10 soit 0. Notre façon habituelle d'évaluer une option d'achat dans le cas du modèle binomial nous donne un prix d'équilibre de 7.14 en fin de première année (exercice).
– Nous pouvons évaluer l'option au début de la première année de la même façon, utilisant le prix de l'action **avec** dividende (pourquoi ?), ce qui donnerait un prix de 6.49.
– Maintenant, examinons les incitations à exercer l'option avant son échéance. Dans ce cas-ci, si le prix augmente à 110, l'option vaudra 10 juste avant que l'action devienne ex dividende à la fin de la première année. Si elle n'est pas exercée, notre raisonnement antérieure nous dit qu'elle vaudra 7.14 une fois que l'action devient ex dividende. Donc, l'option sera exercée à la fin de la première année. Sachant que l'option ne durera pas plus d'une année, il est maintenant facile de l'évaluer au début de la premiȉre année.
– On sait que du point de vue de la première année l'option vaudra soit zéro (si le prix de l'action tombe) soit 10 (si elle est exercée en fin de première année). Notre façon habituelle d'évaluer l'option nous donne un prix d'équilibre de 7.14. La différence entre 7.14 et 6.49 (le prix d'équilibre

d'une option européenne) représente la valeur du droit d'exercer avant l'échéance de l'option.

5 Sujets additionnels reliés à l'évaluation des options

5.1 Problèmes de biais

- Si on connaît le prix sur le marché d'une option (et les autres inputs nécessaires pour utiliser la formule Black-Scholes), on peut utiliser la formule Black-Scholes pour trouver la valeur implicite de la variance instantanée de l'option.
- De cette façon, on infère ce que le marché pense de la variance du prix de l'action.
- Malheureusement, on peut obtenir des estimés différents de la variance avec des options ayant des caractéristiques différentes.
- Par exemple qu'il y a un lien entre le degré auquel une option est en jeu (hor-jeu) et l'estimé implicite de la variance.
- Apparemment, il y a une incohérence entre le modèle et la façon dont le marché évalue les options. Des prix d'exercice faibles, toutes choses étant égales par ailleurs, sont associés à des variances implicites élevées.
- Une interprétation possible est que le marché anticipe une probabilité élevée que le prix des actions qui sont couramment au dessus du prix d'exercice des options baisse pour être plus près du prix d'exercice avant l'échéance des options.
- Autrement dit, la vraie distribution des prix de fin de période (au moins dans l'esprit des participants au marché) n'est pas une loi log-normale.
- Si on veut utiliser les prix du marché afin d'obtenir des estimés implicites de la variance de prix d'actions, il est probablement souhaitable d'utiliser des options qui sont ni trop en jeu ni trop hors-jeu. Autrement dit, utiliser des options qui sont à parité.

6 Conclusions

– Les produits dérivés en général et les options en particulier sont des produits compliqués, puisque leur rendements sont souvent des fonctions très compliqués des rendements des actifs soutenants.
– En dépit de cette complexité, l'application des principes économiques de base de la maximisation de l'utilité espérée et l'absence de possibilités d'arbitrage a permis aux chercheurs de développer des modèles sophistiqués pour l'évaluations des prix des options.

7 Concepts à retenir

– Il est très important d'essayer de comprendre l'intution du modèle Black-Scholes en fonction des autres modèles plus simples que nous avons étudiés. C'est la meilleure façon de relier les modèles ensemble et de comprendre l'impact de variations exogènes (par exemple l'impact d'une modification de la variance du rendement de l'action sur le prix de l'option).
– Les modèles plus simples comme le modèle binomial sont aussi utiles pour comprendre comment il faut modifier la formule Black-Scholes dans le cas d'options américaines.

8 Questions

8.1 Modèle uniforme des options

Soit le modèle uniforme de la détermination des prix des options (européennes). On a une option d'achat (échéance dans un an) dont le prix d'exercice est 60 $. L'action qu'elle donne le droit d'acheter a un prix à la fin de l'année qui suit une distribution uniforme avec un prix maximal de 90 $ et un prix minimal de 50 $. Le taux de rendement sans risque est 10 %.

1. Quelle hypothèse fait-on dans ce modèle concernant l'aversion pour le risque ?
2. Quel est le prix de l'action sur le marché en début d'année ? Expliquez.
3. Quelle est la probabilité que l'option d'achat sera exercée à la fin de l'année ? Expliquez.

4. Quelle est la valeur espérée de l'option en fin d'année ? Expliquez.
5. Quel est le prix de l'option sur le marché en début d'année ?

Réponses

Cette question est une application standard de ce qu'on a vu en classe.

8.2 Modèle binomial des options

Soit une option de vente (échéance dans un an) dont le prix d'exercice est 110 \$. Le prix courant de l'action est 100 \$. Les prix possibles de l'action à la fin de l'année sont 90 \$ et 130 \$. Le taux d'intérêt sans risque est 10 %.

1. Quelle hypothèse fait-on concernant l'aversion pour le risque dans ce modèle ? Doit-on spécifier la fonction d'utilité des individus afin de calculer le prix d'équilibre d'une action ? Expliquez.
2. Quelles sont les valeurs possibles de l'option de vente à la fin de l'année ? Expliquez votre méthodologie.
3. Décrivez une stratégie possible (il y en a deux — choisissez la plus facile !) pour construire un portefeuille sans risque à partir de l'action et de l'option de vente. Montrez que ce portefeuille a une valeur constante en fin d'année.
4. Calculez le prix courant de l'option (en début d'année). Expliquez votre méthodologie.

Réponses

Cette question est une application standard de ce qu'on a vu en classe.

8.3 Modèle uniforme des options

Soit le modèle uniforme de la détermination des prix des options. On a une option de vente européene (échéance dans un an) dont le prix d'exercice est 80\$. L'action qu'elle donne le droit d'acheter a un prix à la fin de l'année qui suit une distribution uniforme avec un prix maximal de 100\$ et un prix minimal de 50\$. Le taux de rendement sans risque est 10%. En répondant aux questions suivantes, expliquez brièvement votre réponse.

1. Quelle hypothèse fait-on dans ce modèle concernant l'aversion pour le risque ?
2. Quel est le prix de l'action sur le marché en début d'année ?

3. Quelle est la probabilité que l'option d'achat sera exercée à la fin de l'année ?
4. Quelle est la valeur espérée de l'option en fin d'année **si** elle est exercée ?
5. Quelle est la valeur espérée de l'option en fin d'année ?
6. Quel est le prix de l'option sur le marché en début d'année ?

Réponses

1. On suppose la neutralié face au risque.
2. C'est tout simplement la valeur actualisé de l'espérance du prix en fin d'année :

$$\frac{100+50}{2} \cdot \frac{1}{1.10}$$

3. Il faut que le prix de l'action soit supérieur au prix d'exercice de 80. Cela arrive avec une probabilité de :

$$\frac{100-80}{100-50} = \frac{20}{50} = 0.4$$

4. C'est une distribution uniforme entre 0 et 20, donc :

$$\frac{20+0}{2} = 10$$

5. C'est le produit des deux réponses précédentes :

$$0.4 \cdot 10 = 4$$

6. C'est la valeur actualisée de la réponse précédente :

$$\frac{1}{1.10} \cdot 4$$

8.4 Modèle uniforme des options (*20 points*)

Soit le modèle uniforme de la détermination des prix des options. On a une option de vente européene (échéance dans un an) dont le prix d'exercice est 80\$. L'action qu'elle donne le droit d'acheter a un prix à la fin de l'année qui suit une distribution uniforme avec un prix maximal de 100\$ et un prix minimal de 50\$. Le taux de rendement sans risque est 10%. En répondant aux questions suivantes, expliquez brièvement votre réponse.

1. Quelle hypothèse fait-on dans ce modèle concernant l'aversion pour le risque ?
2. Quel est le prix de l'action sur le marché en début d'année ?
3. Quelle est la probabilité que l'option d'achat sera exercée à la fin de l'année ?
4. Quelle est la valeur espérée de l'option en fin d'année **si** elle est exercée ?
5. Quelle est la valeur espérée de l'option en fin d'année ?
6. Quel est le prix de l'option sur le marché en début d'année ?

Réponses

1. On suppose la neutralité face au risque.
2. Le prix moyen en fin d'année est donné par :

$$\frac{50+100}{2} = 75.$$

   Le prix en début d'année est tout simplement ce prix actualisé au taux sans risque, donc

$$\frac{1}{1.10} \cdot 75$$

3. C'est la probabilité que le prix de l'action soit inférieur au prix d'exercice de 80 \$. Cette probabilité est donnée par

$$\frac{80-50}{100-50} = .6$$

4. Si elle est exercée on sait que l'option vaut au maximum 30 \$ et au minimum 0 \$, pour une valeur moyenne de 15 \$.
5. C'est le produit des deux réponses précédentes :

$$.6 \cdot 15 = 9\$$$

6. C'est la valeur actualisée de la réponse précédente :

$$\frac{1}{1.10} \cdot 9$$

8.5 Modèle binomial des options (*20 points*)

Supposez une action avec un prix en fin d'année qui peut être soit 150 $ soit 90 $. Supposez l'existence d'une option d'achat européenne avec un prix d'exercice de 110 $, avec échéance à la fin de l'année. Supposez un taux d'intérêt sans risque de 10 %. Finalement, supposez un prix courant de l'action de 95 $.

1. Quelle hypothèse fait-on dans ce modèle concernant l'aversion pour le risque ? Quel rôle est-ce que l'hypothèse joue dans l'évalutation des options ? Expliquez.
2. Décrire comment construire un portefeuille sans risque sur la base de l'action et de l'option d'achat.
3. Quelle est la valeur de votre portefeuille proposé à la fin de l'année ?
4. Quelle est la probabilité que l'option sera exercée à la fin de l'année ? Expliquez.
5. Quel doit être le prix courant de l'option d'achat ?

Réponses

1. On suppose que les individus sont riscophobes. Par contre, la riscophobie ne joue aucun rôle puisqu'on suppose aussi la possibilité de couvrir le risque de l'option en construisant un portefeuille sans risque.
2. Pour une variaton de prix de 60 $ de l'action ($150 - 90$), il y a une variation de la valeur de l'option en fin d'année de 40 $ ($40-0$). On peut construire un portefeuille sans risque en vendant 3 options d'achat pour chaque 2 actions achetées.
3. Si on achète 2 actions et on vend 3 options, alors si le prix de l'action en fin d'année est 90, on a un portefeuille qui vaut 180 $ (les options ne seront pas exercées et nous coûteront rien). Si le prix de l'action en fin d'année est 150, le portefeuille vaut encore 180 $: les actions valent 300 $ et chacune des trois options (qui seront exercées) nous cote 40 $ à couvrir, donc on perd 120 $ pour couvrir les trois options.
4. La probabilité de chacun des deux prix possibles (150 $ ou 90 $) ne fait pas partie des données du problème. On ne peut répondre, mais par contre on sait qu'il n'est pas nécessaire de connaître ces probabilités pour évalueer l'action.

5. On peut actualiser la valeur du portefeuille qui est sans risque au taux d'intérêt sans risque. Cette valeur actualisée doit être égale au coût de construire le portefeuille. Donc, il faut que :

$$\frac{180}{1.10} = 95 \cdot 2 - C_{p0} \cdot 3$$

Le prix courant de l'option est la solution pour l'inconnu de cette équation qui est $C_{p,0}$.

Références

Voir la page suivante :
`http ://www.er.uqam.ca/nobel/r10735/6080/referenc.pdf`

Cette version : **02/11/2004**