Informatique
C/C++ pour la finance

Julien Saunier

29 septembre 2010

```
Deux bibliothèques seront nécessaires : stdlib.h et math.h (C) ou cstlib et cmath (C++).
cstlib :
void srand ( unsigned int seed ) ; // initialisation de la graine du générateur
int rand ( void ) ; // retourne un nombre aléatoire entre 0 et RAND_MAX

cmath :
double exp ( double x ) ;
double log ( double x ) ;
double pow ( double x, double y ) ;
double sqrt ( double x ) ;
```

Générer des nombre aléatoires

- Ecrire la fonction permettant de renvoyer un nombre aléatoire compris entre 0 et 1.
- Quel est le problème des générateurs aléatoires, et notamment de celui proposé dans la cstdlib ?
- Créer une fonction *double* $n(double)$ calculant la loi de distribution normale $n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Ecrire la fonction permettant de renvoyer un nombre normal aléatoire -tiré selon une distribution normale uniforme- par la méthode de la forme polaire de Box-Muller (plus rapide et robuste que la forme littérale de la transformation).
  La description algorithmique est la suivante :
  On tire deux nombres au hasard x_0 et x_1 entre 0 et 1.
  On calcule v_0 et v_1 tels que $v_i = 2x_i - 1$.
  Soit $s = x_0^2 + x_1^2$;
  Si s est supérieur à 1, alors on recommence au début.
  Sinon, on récupère[1] $v_0\sqrt{\frac{-2ln(s)}{s}}$.

Black Scholes

La formule de Black-Scholes permet de calculer la valeur théorique d'une option à partir des cinq données suivantes : S_t la valeur actuelle de l'action sous-jacente ; t le temps qui reste à l'option avant son échéance (exprimé en années) ; K le prix d'exercice fixé par l'option ; r le taux d'intérêt sans risque ; σ la volatilité du prix de l'action ;

Le prix théorique d'une option d'achat ("call"), qui donne le droit mais pas l'obligation d'acheter l'actif S à la valeur K à la date T, est caractérisé par son "pay off" : $(\mathcal{S}_T - K)^+ = \max(S_T - K; 0)$

Le prix de l'option est donné par l'espérance sous probabilité risque neutre du "pay off" terminal actualisé $C = E[Payoff \times e^{-rT}]$, soit la formule de Black-Scholes :

$C(S, K, r, t, \sigma) = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rt}\mathcal{N}(d_2)$

De même,le prix théorique d'une option de vente ("put"), de "pay off" $(K - \mathcal{S}_T)^+ = \max(K - S_T; 0)$ est donné par :

$P(S, K, r, t, \sigma) = -S\mathcal{N}(-d_1) + Ke^{-rt}\mathcal{N}(-d_2)$

1. Il est à noter que $v_1\sqrt{\frac{-2ln(s)}{s}}$ est aussi un nombre valable.

avec * $\mathcal{N}$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$
$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]$
$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$

Calcul numérique

Dans la suite de l'exercice, nous supposons la présence d'une fonction de répartition de la loi normale centrée réduite *double* $N(double)$ dans une bibliothèque "normdist.h".

- Ecrire la fonction calculant le prix d'un call d'une option ; ainsi que celle calculant le prix d'un put.
- Ecrire la fonction d'appel de ces deux fonctions pour un action valant actuellement 50, un temps à échéance de 6 mois, une volatilité de l'action estimée à 30%, un taux d'intérêt sans risque de 10%.

Il est parfois intéressant de calculer les dérivées partielles du prix d'option, le delta et le gamma étant liés aux prix, theta lié au temps, vega à la volatilité et rho au taux d'intérêt. Leurs formules sont les suivantes :

Delta (Δ)

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1)$$

Gamma (Γ)

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

Theta (Θ)

$$\frac{\partial c}{\partial (T-t)} = Sn(d_1)\frac{1}{2}\sigma\frac{1}{\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -Sn(d_1)\frac{1}{2}\sigma\frac{1}{\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Vega

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}n(d_1)$$

Rho (ρ)

$$\frac{\partial c}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

- Ecrire une fonction calculant l'ensemble des dérivées ; Ecrire une fonction l'appliquant à l'exemple précédent.

Valeur approchée

Il est également intéressant de calculer la volatibilité impliquée par la valeur et le prix d'exercice c_0. Il faut donc trouver une solution à $c_0 = c(S, K, r, \sigma, T-t)$. Cependant, il n'y a pas de forme fermée, une solution est donc d'utiliser une recherche binomiale.

Il faut borner sigma entre un inférieur (fixé à $1.0e-5$). On cherche ensuite à fixer le supérieur juste au dessus de la valeur réelle, que nous fixons ici initialement à 0.3. Enfin, on effectue une recherche systematique entre les bornes en les réduisant au fur et à mesure de la recherche.

- Implémenter cet algorithme en tenant compte de la faisabilité.