Informatique - C++ pour la finance

Julien Saunier, 30 septembre 2010

Modèle Binomial à n périodes

Le modèle binomial est particulièrement utilisé dans le cadre d'options américaines ou exotiques. Pour des raisons de simplicité, nous étudions le cas appliqué aux options européennes. L'évolution du prix dans le modèle de Black-Scholes peut être approchée par un arbre binomial :

$$S_{t+h} = \begin{cases} u \times S_t, & q \\ d \times S_t, & 1-q \end{cases}$$

Les données sont le prix initial S_O, le prix au strike X, le taux d'intérêt sans risques annuel r, le temps à maturité t_m (exprimé aussi en années), la volatilité σ et le nombre de pas n.

La probabilité q est calculée telle que $q = \frac{e^{r\delta t}-d}{u-d}$, et u et d sont les données (évolution haute et basse, avec $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$ et $d = \frac{1}{u}$. Il est à noter que δt n'est pas le temps à maturité, mais le temps écoulé entre chaque pas de la simulation.

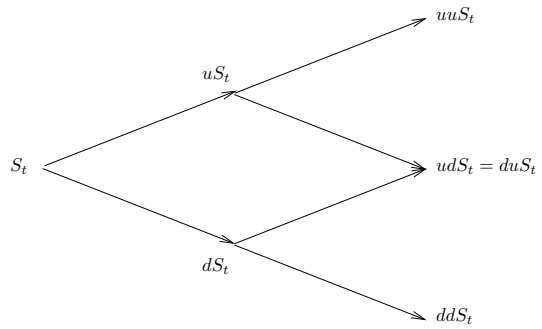

FIGURE 1 – arbre binomial, deux périodes.

Algorithme : Il s'agit de construire l'ensemble des feuilles de l'arbre (dans la figure 1 : uuS_t, duS_t, ddS_t), puis de remonter jusqu'à la racine pour trouver la valeur de l'option.

Notons S_n^m le m-ième noeud de l'arbre à l'instant n, avec S_0 le prix actuel :

$$S_n^m = (1+d)^{n-m}(1+u)^m S_0$$

Notons C_n^m le prix d'une option européenne à l'instant n étant donné que l'action vaut S_n^m. Pour le calcul des feuilles, on a $C_n^m = max(0, S_n^m - X)$ avec X le prix du strike.

On peut ensuite remonter l'arbre par la formule d'itération suivante :

$$C_n^m = e^{-r\delta t}(qC_{n+1}^{m+1} + (1-q)C_{n+1}^m) \tag{1}$$

avec r le taux d'intérêt par période. La racine de l'arbre donne l'évaluation de l'option.

Implémenter une fonction qui calcule le prix d'une option *Call* en utilisant le modèle binomial à périodes multiples, le nombre de périodes étant un paramètre.