Informatique
C# pour la finance

Julien Saunier

3 novembre 2010

Rappel de la formule de Black-Scholes : $C_{BS}(S, K, r, \delta t, \sigma) = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r\delta t}\mathcal{N}(d_2)$
avec S_t la valeur actuelle de l'action sous-jacente ; δt le temps qui reste à l'option avant son échéance (exprimé en années) ; K le prix d'exercice fixé par l'option ; r le taux d'intérêt sans risque ; σ la volatilité du prix de l'action ; $\mathcal{N}$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$; $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\delta t}}\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t\right]$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\delta t}$

Modèle de diffusion avec saut (Merton)

Ce modèle ajoute le risque de saut dans la valeur de l'action. Nous considérons ici un cas particulier où la taille du saut suit une distribution normale. λ et κ sont des paramètres de la distribution. Pour un call européen, la formule est :

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda'\delta t}(\lambda'\delta t)^n}{n!} C_{BS}(S, X, r_n, \sigma_n^2, \delta t) \tag{1}$$

avec δt le temps à maturité, $\lambda' = \lambda(1+\kappa)$, C_{BS} la formule de Black-Scholes, $\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\tau^2}{\delta t}$ et $r_n = r - \lambda\kappa + \frac{nln(1+\kappa)}{\delta t}$.

L'infini étant difficile à calculer, il est raisonnable de limiter n à 50. De plus, nous simplifions la formule de la façon suivante :

$$\frac{e^{\lambda'\delta t}(\lambda'\delta t)^n}{n!} = exp\left(-\lambda'\delta t + nln(\lambda'\delta t) - \sum_{i=0}^{n} ln(i)\right) \tag{2}$$

Implémenter le modèle et tester pour $S = 100$, $K = 120$,$r = 0.05$,$\sigma = 0.3$, $\delta t = 1$ et $\lambda = \kappa = \tau = 0.5$.

Arbres

- Ecrire une fonction permettant de construire un arbre représentant un arbre de taux d'intérêt (Fig. 1). La fonction prend en paramètre le taux initial r_0, l'option haute u, l'option basse d et le nombre de pas de temps n (chaque pas représente un niveau de l'arbre). Faire en sorte que la structure soit minimale (par exemple, éviter une matrice carrée qui serait par définition à moitié vide).
- Implémenter une fonction prenant un arbre de taux d'intérêt en paramètre et renvoyant un chemin aléatoire de la racine vers une feuille.

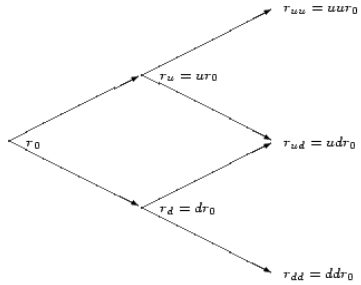

FIGURE 1 – Arbre binomial